超幾何関数

Twitter：@FugaciousShade

最終更新日：2021 年 8 月 23 日

目次

記法

- $\mathbb{C}$：複素数全体
- $\mathbb{R}$：実数全体
- $\mathbb{Q}$：有理数全体
- $\mathbb{Z}$：整数全体
- $\mathbb{N}$：非負整数全体
- $\mathrm{Re}(z)$：複素数 z の実部
- $\mathrm{Im}(z)$：複素数 z の虚部
- z^*：複素数 z の複素共役
- $A^\dagger$：作用素 A の Hermite 共役（随伴）作用素
- $A \coloneqq B$：A を $A = B$ によって定義する
- $\mathcal{O}, o$：Landau 記号
- $\binom{n}{k}$：二項係数
- δ_{ij}：Kronecker の delta 記号
- det：行列式
- $\mathrm{Mat}(m, n, S)$：S 上の (m, n) 行列全体
- $\mathrm{GL}_n(K)$：体 K 上の n 次一般線型群
- $\mathrm{SL}_n(K)$：体 K 上の n 次一般線型群
- ${}^tA$：行列 A の転置行列
- id_S：S 上の恒等写像
- $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$：$\Lambda$ 上の数列
- $\forall$：全称記号
- $\exists$：存在記号

特に断りがない限り，$0 \in \mathbb{N}$ とする。

1　まえがき

超幾何関数は複素関数論や微分方程式論の対象であり，物理学とも深い関わりがある。物理学で登場する殆どの特殊関数は超幾何関数として表すことができて，その多くは Laplace 作用素を含む偏微分方程式を極座標表示によって変数分離した際に現れる。本書で述べるのは主に Gauss の超幾何関数・Kummer の合流型超幾何関数についてであるが，一部の章では一般化超幾何関数も扱う。

超幾何関数には，

- 級数表示
- 超幾何微分方程式
- 積分表示

の 3 つの表示の方法がある。

この章では，Gauss の超幾何関数における 3 つの表示の概要を簡単に述べる。Gauss の超幾何級数は，4 つの複素数 a, b, c, x をパラメータに持ち，

$$ {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\,\right|\, x\right] \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c,1)_n} x^n \tag{1.1} $$

で定義される。ここで，$(a)_n$ は Pochhammer 記号で，Gamma 関数 $\Gamma(x)$ を用いて

$$ (a)_n \coloneqq \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} $$

で定義され，

$$ (a_1, \ldots, a_m)_n \coloneqq \prod_{k=1}^{m} (a_k)_n $$

である。Gamma 関数・Pochhammer 記号についての基本的な性質は付録*1A, B に記した。Gauss の超幾何級数は，a, b が共に 0 以下の整数でない場合には無限級数となる。

a, b, c が一般のままだと見えてこないが，いくつかの具体的な初等関数を Gauss の超幾何級数で表してみると，

$$ \begin{aligned} \ln(1+x) &= x \cdot {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix}\,\right|\, -x\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\ \arcsin(x) &= x \cdot {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\,\right|\, x^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1} \\ \arctan(x) &= x \cdot {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1 \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\,\right|\, -x^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \end{aligned} $$

のようになる。これらは定理 2.10 で証明する。

上では Gauss の超幾何級数による例を上げたが，2 章で述べる一般化超幾何級数に拡張することで，指数関数，双曲線関数，三角関数，正弦積分なども表すことができる。他にも，第一種完全楕円積分 $K(x)$，第二種完

*1 付録の記述の多くは [8], [9] を参考にした。

全楕円積分 $E(x)$，第一種 Legendre 関数 $P_\lambda(x)$，Chebyshev 多項式 $T_n(x)$，Laguerre 多項式 $L_n(x)$，Bessel 関数 $J_\lambda(x)$，Hermite 多項式 $H_n(x)$ はそれぞれ，

$$\begin{aligned}
K(x) &= \frac{\pi}{2}\cdot {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, x^2\right], & E(x) &= \frac{\pi}{2}\cdot {}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, x^2\right],\\
P_\lambda(x) &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}-\lambda,\lambda+1\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, \frac{1-x}{2}\right], & T_n(x) &= \frac{1}{2^{n-1}}\cdot {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,n\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\, \frac{1-x}{2}\right],\\
L_n(x) &= n!\cdot {}_1F_1\left[\begin{matrix}-n\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, x\right], & J_\lambda(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\lambda+1)}\,{}_1F_1\left[\begin{matrix}\lambda+\frac{1}{2}\\ 2\lambda+1\end{matrix}\,\middle|\, 2ix\right]\\
H_{2n}(x) &= \frac{(-1)^n(2n)!}{n!}\cdot {}_1F_1\left[\begin{matrix}-n\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\, x^2\right], & H_{2n+1}(x) &= \frac{(-1)^m(2n+1)!}{n!}\cdot 2x\cdot {}_1F_1\left[\begin{matrix}-n\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\, x^2\right],
\end{aligned}$$

のように表せる。こうして眺めてみると，特殊関数は超幾何級数を経由することで統一的に扱えることが見えてくるのではないだろうか。

Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$ で表せるような特殊関数が満たす微分方程式[*2]は，次に述べるような Gauss の超幾何微分方程式に帰着できる。その他の特殊関数も，適切な変数変換を施すことで一般化超幾何微分方程式に帰着されるものが殆どである。

次に，超幾何関数の 2 つ目の顔である微分方程式表示について簡単に述べる。(1.1) 式で定義される Gauss の超幾何級数は，Gauss の超幾何微分方程式：

$$x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0 \tag{1.2}$$

の解の一つである。x を複素変数とみなして (1.2) 式を複素領域の微分方程式とみなすと，解析接続によって (1.1) 式の定義域を拡張できる。こうして得られたものを Gauss の超幾何関数という。

例えば，Legendre の微分方程式：

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{1.3}$$

は，$x = 1-2z$ の変数変換によって，

$$z(1-z)u'' + (1-2z)u' + n(n+1)u = 0$$

に書き換えられるが，これは $a=-n,\, b=n+1,\, c=1$ の場合の Gauss の超幾何微分方程式そのものである。Gauss の超幾何微分方程式に帰着させてしまえば，この微分方程式の解の一つが自動的に，

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,n+1\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, z\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,n+1\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, \frac{1-x}{2}\right] = P_n(x)$$

であることが分かってしまう。超幾何微分方程式に帰着させるための変数変換の手法[*3]については本文で詳しく述べる。

本来，(1.3) 式の解を求めるためには冪級数解法（Frobenius の方法），すなわち，適当な x_0 を決めて[*4]

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-x_0)^{n+\lambda}$$

[*2] 正確には 3 点を確定特異点に持つような Fuchs 型の常微分方程式

[*3] 主に一次分数変換

[*4] x_0 が確定特異点となるように選ぶとよい場合が多い

と仮定して代入，λ についての条件を求めた後，c_n の満たす漸化式を微分方程式から決定し，それを解くことで y を決定する，という手順を辿る必要があった。しかし，超幾何微分方程式の解について予め詳しく調べておけば，そのような複雑な計算をすることなく微分方程式の解を求めることが出来てしまう。

最後に，超幾何関数の 3 つ目の表示，積分表示について簡単に述べる。(1.1) 式で定義された Gauss の超幾何級数は積分表示：

$$
{}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\,\right|\, x\right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 dt\ t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}
$$

を持つ。

一般に，関数を冪級数表示にしてしまうと収束半径による制限があるため，複素平面上の限られた領域でしか意味をなさないことがある。しかし，複素関数論における一致の定理と，超幾何微分方程式を利用することで他の領域に定義域を拡張していくことが可能になる。それぞれの領域での超幾何関数同士の接続係数を与えるのに積分表示が重宝する。また，超幾何級数の特殊値を導く際に積分表示が有用なことも多い。

本文では，超幾何関数の 3 つの表示を巡ることで特殊関数を統一的に扱うことができることを見ていく。

注意

本書は未完成です。追記予定の内容を前提とした内容がある箇所もありますがご了承ください。更新履歴は私のブログ記事[*5]からご確認ください。

本書の主な内容は超幾何関数についてですが，特殊関数などに関する内容の付録も充実させていく予定です。付録には公式や，本文中で必要になる概念が載っていますが，本文とは完全に独立して読めるようにもなっています。

計算過程をできるだけ詳細に記したので，場合によっては却って読みづらくなっている箇所があるかもしれません。

随所で微積分と級数，極限と微積分の順序交換をしていますが，厳密には交換可能のための条件が不足している箇所も少なくないと思われます。筆者は全て確認しているわけではないので，そのような条件の詳細は解析学の専門書（例えば [4, 杉浦] など）を参照してください。

誤植や内容的な誤りにお気付きの場合にはブログ記事のコメント欄 [*5] か，筆者の Twitter アカウント[*6]などにご連絡いただけると幸いです。

また，式番号（例えば (1.2) 式）や参考文献（例えば [2, 原岡]）のような参照はハイパーリンクになっているので，ビュアーによっては数字の部分をクリックすると該当箇所に飛ぶことができます。

2　超幾何級数

2.1　原点周りの冪級数表示

Gamma 関数の定義や性質については付録 A に記した。Pochhammer 記号の定義・性質については付録 B にまとめてある。Pochhammer 記号の定義は

$$
(a)_n \coloneqq \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}
$$

[*5] `https://fugaciousshade.blogspot.com/2021/05/HypergeometricFunction-PDF.html`
[*6] `https://twitter.com/FugaciousShade`

である。Pochhammer 記号同士の積は略記して，

$$(a,b)_n \coloneqq (a)_n (b)_n = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

と表すことがある。

この節では Gamma 関数の階乗の一般化としての性質から導かれる，

$$(a)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(a+k) = a(a-1)\cdots(a+n-1)$$

と，$(1)_n = \Gamma(n+1) = n!$ 及び，$(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$ さえ押さえておけば問題ない。

定義 2.1 (Gauss の超幾何関数)**.** Gauss の超幾何級数は，複素変数 a, b, c, x を用いて，

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, x\right] \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c,1)_n} x^n \tag{2.1}$$

で定義される。

具体的に数項を書き下してみると，

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, x\right] = 1 + \frac{ab}{c\cdot 1}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\cdot 1\cdot 2}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

となる。

注意 2.2. 文中ではスペースの都合上，$y = {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, x\right]$ とは書かずに，$y = {}_2F_1(a,\, b;\, c;\, x)$ のようにセミコロン区切りで表記することがある。

注意 2.3. Pochhammer 記号は，$(a,b)_n = (a)_n(b)_n = (b,a)_n$ を満たすから，a, b に関して対称，すなわち

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, x\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix} b, a \\ c \end{matrix} \middle| \, x\right]$$

を満たす。

もしも c が 0 以下の整数だとすると $-c < n$ のときに $(c)_n = 0$ となり（命題 B.4 参照），分母が 0 になってしまうため，以降では $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を仮定する。

また，a, b のいずれかが 0 以下の整数の場合，$(a,b)_n = 0$ となる n が存在し，それ以降の n でも $(a,b)_n$ は全て 0 となるので，(2.1) 式は x に関する有限次の多項式関数になる。

定義 2.4 (一般化超幾何級数)**.** r, s を自然数，$a_1, \ldots, a_s$, $b_1, \ldots, b_r$, x を複素変数とする。一般化超幾何級数は，

$$ {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} \middle| \, x\right] \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \ldots, a_r)_n}{(b_1, \ldots, b_s, 1)_n} x^n$$

で定義する。但し，r が 0 の場合，

$$ {}_0F_s\left[\begin{matrix} - \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} \middle| \, x\right] \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b_1, \ldots, b_s, 1)_n} x^n$$

と定義し，s が 0 の場合，

$$
{}_rF_0\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_r \\ - \end{matrix}\,\middle|\, x\right] \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\dots,a_r)_n}{(1)_n} x^n
$$

と定め，$r = s = 0$ の場合にも，

$$
{}_0F_0\left[\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}\,\middle|\, x\right] \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_n} x^n
$$

とする。

注意 2.5. Gauss の超幾何級数と同様，スペースの都合で文中では $y = {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_r \\ b_1,\dots,b_s \end{matrix}\,\middle|\, x\right]$ とは書かずに，$y = {}_rF_s(a_1,\dots,a_r\,;\,b_1,\dots,b_s\,;\,x)$ のようにセミコロン区切りで表記することがある。

注意 2.6. 一般化超幾何級数も注意 2.3 と同様に，引数 $(a_1,\dots,a_r)$ は順序には依らない。$(b_1,\dots,b_s)$ の順序も任意である。

補足 2.7. $a_r = b_s = c$ の場合，$(a_1,\dots,a_{r-1},a_r)_n = (a_1,\dots,a_{r-1})_n(a_r)_n$ などから，

$$
\begin{aligned}
{}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_{r-1},c \\ b_1,\dots,b_{s-1},c \end{matrix}\,\middle|\, x\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\dots,a_{r-1})_n(c)_n}{(b_1,\dots,b_{s-1},1)_n(c)_n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\dots,a_{r-1})_n}{(b_1,\dots,b_{s-1},1)_n} x^n = {}_{r-1}F_{s-1}\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_{r-1} \\ b_1,\dots,b_{s-1} \end{matrix}\,\middle|\, x\right]
\end{aligned}
$$

が成立する。

例えば，

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4},\frac{3}{2} \end{matrix}\,\middle|\, x\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\,\middle|\, x\right]
$$

が成立する。この場合，左辺の ${}_3F_2$ には上段・下段に引数 $\frac{3}{4}$ が共通しているため，$\frac{3}{4}$ がキャンセルされて引数の個数が減り，${}_2F_1$ に落ちる。

命題 2.8 (超幾何級数の収束半径)**.** 有限和ではないような一般化超幾何級数の収束半径 R は，

$$
R = \begin{cases} \infty, & (r > s+1) \\ 1, & (r = s+1) \\ 0, & (r < s+1) \end{cases}
$$

である。

Proof. d'Alembert の収束判定法を用いる。一般化超幾何級数 ${}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_r \\ b_1,\dots,b_s \end{matrix}\,\middle|\, x\right]$ の x^n の係数を c_n と置く：

$$
c_n \coloneqq \frac{(a_1,\dots,a_r)_n}{(b_1,\dots,b_s,1)_n}.
$$

収束半径 R は，

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s,1)_n} \cdot \frac{(b_1,\ldots,b_s,1)_{n+1}}{(a_1,\ldots,a_r)_{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(b_1+n)\cdots(b_s+n)(n+1)}{(a_1+n)\cdots(a_r+n)} \end{aligned}$$

となる。n に関して，分子は $(s+1)$ 次，分母は r 次である。$r=s+1$ のときは，分母・分子を n^r で割ると $R=1$ が分かる。$r>s+1$ のときは，分母・分子を n^{s+1} で割ると $R=0$ が分かる。$r<s+1$ のときは，分母・分子を n^r で割ると $R=\infty$ が分かる。 □

Gauss の超幾何級数は，$r=2,\ s=1$ に該当するから，$r=s+1$ であり，収束半径は $R=1$ である。すなわち，Gauss の超幾何級数：

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\middle|\, z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c,1)_n} z^n$$

は，$|z|<1$ で絶対収束する。

注意 2.9. 詳細は 2.3 節で述べるが，ある点 c の周りでの冪級数展開の収束半径が有限の値 R を取る場合，収束円 $|z-c|=R$ 上に少なくとも 1 点は特異点が存在する。このことから，有限和でない Gauss の超幾何級数は収束半径が 1 であるため，複素平面上の単位円 $|z|=1$ の上のどこかに特異点があることが判る（実際には $z=1$）。特異点と解析接続の関係は，Gauss の超幾何微分方程式を導いた後で詳しく議論されることになる。

2.2　初等関数の超幾何級数表示

上では一般的な定義を述べたが，適当な冪級数を超幾何級数に直す練習として，指数関数・双曲線関数・三角関数・対数関数を超幾何級数を用いて表してみる。

定理 2.10 (指数関数・双曲線関数・三角関数・対数関数の超幾何級数表示)**.**

$$\begin{aligned} e^x &= {}_0F_0\left[\begin{matrix}-\\-\end{matrix}\,\middle|\, x\right], & \ln(1+x) &= x\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix}\,\middle|\, -x\right], \\ \cosh(x) &= {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\, \frac{x^2}{4}\right], & \sinh(x) &= x\cdot{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\, \frac{x^2}{4}\right], \\ \cos(x) &= {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\, -\frac{x^2}{4}\right], & \sin(x) &= x\cdot{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\, -\frac{x^2}{4}\right], \\ \arcsin(x) &= x\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\, x^2\right], & \arctan(x) &= x\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},1\\\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\, -x^2\right]. \end{aligned}$$

Proof. e^x については，$(1)_n=n!$ を用いれば，

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_n} x^n = {}_0F_0\left[\begin{matrix}-\\-\end{matrix}\,\middle|\, x\right]$$

となる。

超幾何級数には必ず定数項 1 が存在することに注意する。すなわち，x^0 の項が存在しない冪級数の場合は，定数項が 1 になるように x などで括り，定数項が 1 となるように次数を調節しておく必要がある。

$\ln(1+x)$ については最低次の次数が x であり，その係数は 1 だから，冪級数全体を x で括る必要がある。まず添字をひとつずらして，

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$$

としておく。命題 B.5 の結果から，

$$n+1=1\cdot\frac{(2)_n}{(1)_n}$$

であり，これを代入すれば，

$$\ln(1+x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1)_n}{(2)_n}x^n$$

と書き換えられる。超幾何級数の各項の係数の分母には $(1)_n=n!$ が必ずあるはずなので $(1)_n$ を分母分子に掛けておき，$(-1)^n$ を x^n とまとめておくと，

$$\ln(1+x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(1)_n}{(2)_n(1)_n}(-x)^n=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1,1)_n}{(2,1)_n}(-x)^n=x\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix}\,\middle|\,-x\right]$$

を得る。

cosh や cos のように $(2n)!$ が出てくる場合は，命題 B.12 の

$$(2n)!=2^{2n}(1)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n$$

を用いて，

$$\cosh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}(1)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2},1\right)_n}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n={}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,\frac{x^2}{4}\right]$$

のようにすればよい。

arcsin のように二重階乗を含む場合は，命題 B.13 の式を利用する。命題 B.13 によれば，

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n}$$

である。また，命題 B.5 の結果から，

$$2n+1=1\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}\tag{2.2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\arcsin(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n}x^{2n}\\&=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2},1\right)_n}\left(x^2\right)^n=x\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,x^2\right]\end{aligned}$$

が従う。

arctan は (2.2) 式を用いれば十分で，

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} \cdot \frac{(1)_n}{(1)_n} (-1)^n x^{2n} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}, 1\right)_n}{\left(\frac{3}{2}, 1\right)_n} \left(-x^2\right)^n = x \cdot {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, 1 \\ \frac{3}{2}\end{matrix} \middle| -x^2\right]\end{aligned}$$

となる。 □

問 2.1. 定理 2.10 の証明において取り扱わなかった関数についても同様にして証明せよ。

2.3 収束半径と特異点

この節では，冪級数の収束半径と特異点の関係について述べる。

定理 2.11. $z = c$ 周りの冪級数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-c)^n$$

の収束半径 R が有限の場合，収束円 $|z-c| = R$ 上に少なくとも 1 点は特異点が存在する。言い換えると，$z = c$ 周りの冪級数の収束半径は，$z = c$ から最も近い位置にある特異点までの距離である。

冪級数展開を用いて得られた微分方程式の冪級数解の収束半径が有限の場合，収束円の境界上に特異点が存在する。収束円内の別の点から再び冪級数展開することによって，収束する領域を広げることができる場合がある。

例 2.12. 原点周りの冪級数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

の収束半径は $R = \infty$ であり，複素平面上の全域で e^z に一致する。

例 2.13. 原点周りの冪級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

の収束半径は $R = 1$ であり，少なくとも $|z| < 1$ で $\ln(1+z)$ に一致する。$\ln(1+z)$ は $z = -1$ を特異点に持ち，展開の中心 $z = 0$ と特異点 $z = -1$ の距離は 1 であり，確かに収束半径と一致する。

例 2.14. 原点周りの冪級数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

の収束半径は $R = 1$ であり，少なくとも $|z| < 1$ で $\frac{1}{1-z}$ に一致する。$\frac{1}{1-z}$ は $z = 1$ を特異点に持ち，展開の中心 $z = 0$ と特異点 $z = 1$ の距離は 1 であり，確かに収束半径と一致する。

Gauss の超幾何級数：

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|\,z\right] \tag{2.3}$$

の収束半径は $R=1$ である。これより，単位円 $|z|=1$ 上のどこかに特異点が存在することになる。3.3 節で見るように，特異点は $z=0$ と $z=1$ にあり，(2.3) 式はそもそも特異点周りの解である。特異点周りの解であるのにも関わらず (2.3) 式は少なくとも $z=0$ を含めた $|z|<1$ では正則であることは少々奇妙に感じるかもしれないが，(2.3) 式は 3.3 節で述べる Gauss の超幾何微分方程式の解の一部に過ぎず，実際，$z=0$ が特異点になる解もある。

2.4 Gauss の超幾何定理

Gauss の超幾何級数の積分表示の節でもう一度導出することになるが，ここでは積分表示を用いずに直接証明する方法を紹介する。

定理 2.15 (Kummer の関係)**.** a, b, c を複素数とし，$c\notin\mathbb{Z}_{\le 0}$, $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ のとき，

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|\,1\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

が成立する。

Proof. 収束条件が $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ であることを確認するために，各項の漸近形を調べておく。まず，

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}&=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)(x+n-1)\\&=\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)=x^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{x}\right)\sim x^n\quad(x\to\infty)\end{aligned}$$

である[*7][*8]から，

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)}\sim n^a\quad(n\to\infty)$$

である。これを用いると，各項の漸近形は，

$$\begin{aligned}\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)}\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(c+n)}\cdot\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1+n)}\\&\sim\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot n^a\cdot n^b\cdot\frac{1}{n^c}\cdot\frac{1}{n^1}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot\frac{1}{n^{c-a-b+1}}\quad(n\to\infty)\end{aligned}\tag{2.4}$$

と分かる。一般に，

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

が収束するのは $\mathrm{Re}(z)>1$ に限る（命題 F.2 参照）から，$\mathrm{Re}(c-a-b+1)>1$, すなわち $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ が収束条件である。

[*7] $f(x)\sim g(x)$ $(x\to\infty)$ であるとは，$\frac{f(x)}{g(x)}\to 1$ $(x\to\infty)$ が成立すること。

[*8] この議論はやや不完全で，厳密には Gamma 関数の漸近展開（追記予定）を用いて証明されるべきである。

次に具体的な収束値を示す。Gauss の超幾何級数の $z=1$ における級数の値を $C(a,b,c)$ と置く。すなわち，

$$C(a,b,c) \coloneqq {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, 1\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}$$

と定める。

以下，証明の方針を述べる。まず，

$$\frac{C(a,b,c+1)}{C(a,b,c)} = \frac{c(c-a-b)}{(c-a)(c-b)} \tag{2.5}$$

を示す。次に，

$$C(a,b,c+m) \longrightarrow 1 \quad (m \to \infty)$$

を示し，Gamma 関数の Euler 乗積表示（命題 A.2）を用いることで証明が完成する。

(2.5) 式を示すために，Pochhammer 記号に関する恒等式：

$$c(c-a-b)\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n} = (c-a)(c-b)\frac{(a,b)_n}{(c+1,1)_n} + c\left(n\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n} - (n+1)\frac{(a,b)_{n+1}}{(c,1)_{n+1}}\right) \tag{2.6}$$

を示す。命題 B.5 から

$$(a+1)_n = \frac{a+n}{a}\cdot(a)_n$$

であって，命題 B.8 から

$$(a)_{n+1} = (a)_n(a+n)_1 = (a+n)(a)_n$$

であり，これを用いて右辺を計算すると，

$$\begin{aligned}
&(c-a)(c-b)\frac{(a,b)_n}{(c+1,1)_n} + c\left(n\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n} - (n+1)\frac{(a,b)_{n+1}}{(c,1)_{n+1}}\right) \\
&= (c-a)(c-b)\cdot\frac{c}{c+n}\cdot\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n} + c\left(n\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n} - (n+1)\cdot\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}\right) \\
&= \frac{c}{c+n}\cdot\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}\cdot\{(c-a)(c-b)+n(n+c)-(n+a)(n+b)\} \\
&= \frac{c}{c+n}\cdot\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}\cdot(c+n)(c-a-b) \\
&= c(c-a-b)\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}
\end{aligned}$$

となるので確かに成立。

(2.6) 式の両辺を $n=0,1,2,\ldots$ で足し合わせると，左辺は，

$$\begin{aligned}
&c(c-a-b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n} \\
&= c(c-a-b)C(a,b,c)
\end{aligned}$$

となり，右辺は，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left[(c-a)(c-b)\frac{(a,b)_n}{(c+1,1)_n}+c\left(n\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}-(n+1)\frac{(a,b)_{n+1}}{(c,1)_{n+1}}\right)\right] \\
&=(c-a)(c-b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c+1,1)_n}+c\left[\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(a,b)_{n+1}}{(c,1)_{n+1}}\right] \\
&=(c-a)(c-b)C(a,b,c+1)+c\cdot 0\cdot\frac{(a,b)_0}{(c,1)_0} \\
&=(c-a)(c-b)C(a,b,c+1)
\end{aligned}
$$

となり，

$$c(c-a-b)C(a,b,c)=(c-a)(c-b)C(a,b,c+1)$$

が従うから確かに，

$$\frac{C(a,b,c+1)}{C(a,b,c)}=\frac{c(c-a-b)}{(c-a)(c-b)}$$

が成立する。

次に，

$$C(a,b,c+m)\longrightarrow 1\quad(m\to\infty)$$

を示す。

$$C(a,b,c+m)={}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}a,b\\c+m\end{matrix}\right|1\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c+m,1)_n}$$

である。最右辺の級数の各項は命題 B.6 により

$$\frac{(a,b)_n}{(c+m,1)_n}=\frac{(a,b)_n}{(1)_n}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{c+m+k}\longrightarrow 0\quad(m\to\infty)$$

であって，かつ (2.4) 式の議論から，

$$\frac{(a,b)_n}{(c+m,1)_n}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{c-a-b+m+1}}\right)\quad(n\to\infty)$$

なので全ての項は 0 に向かい，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c+m,1)_n}\longrightarrow 0\quad(m\to\infty)$$

である。このことから，

$$C(a,b,c+m)\longrightarrow 1\quad(m\to\infty)$$

である。

また，(2.5) 式から，

$$C(a,b,c)=\frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)}C(a,b,c+1)$$

であって，数学的帰納法により，任意の自然数 m について

$$C(a,b,c)=C(a,b,c+m+1)\prod_{k=0}^{m}\frac{(c-a+k)(c-b+k)}{(c+k)(c-a-b+k)}\tag{2.7}$$

が言える。最後に，命題 A.2 の Gamma 関数の Euler 乗積表示から，

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} m^z \cdot m! \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{z+k}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}
&C(a,b,c+m+1) \prod_{k=0}^{m} \frac{(c-a+k)(c-b+k)}{(c+k)(c-a-b+k)} \\
&= C(a,b,c+m+1) \cdot \frac{m^{c-a}\cdot m^{c-b}}{m^c \cdot m^{c-a-b}} \cdot \frac{\left[m^c \cdot m! \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{c+k}\right]\left[m^{c-a-b}\cdot m! \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{(c-a-b)+k}\right]}{\left[m^{c-a}\cdot m! \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{(c-a)+k}\right]\left[m^{c-b}\cdot m! \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{(c-b)+k}\right]} \\
&\longrightarrow 1 \cdot 1 \cdot \frac{\Gamma(c)\cdot\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\cdot\Gamma(c-b)} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (m\to\infty)
\end{aligned}$$

となる。元々 (2.7) 式の左辺は m に依らないから，

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix} \middle| \, 1\right] = C(a,b,c) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

が従うことが判った。収束条件は上で述べたように $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$ である。 □

Pochhammer 記号の部分を Gamma 関数を使って書き直せば，

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\cdot n!} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

あるいは左辺の因子を右辺に寄せて，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\cdot n!} = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

とも書ける。

3 Gauss の超幾何微分方程式

Gauss の超幾何級数が満たす微分方程式を導くことで，級数表示では見えてこなかった特異点の位置やその性質を明らかにする。

3.1 線型作用素

厳密には関数空間を明示して考察しなければならない[*9]が，ここではもう少しラフに考えよう。

定義 3.1 (線型作用素)**.** T は関数を関数に写す写像であるとする。T が線型作用素であるとは，任意の関数 f, g，任意の定数 a, b に対して，

$$T[af+bg] = aT[f] + bT[g]$$

を満たすことである。$T[f]$ のことを単に Tf と書くこともある。

[*9] Hilbert 空間についての記述を付録 G に随時追記予定。

基底に対して線型であれば，その線形結合で表される一般的な関数についても線型に振る舞うので，基底に対する作用だけを見れば十分である。

例 3.2. 微分作用素は線型である。実際，a, b を定数とするとき，

$$\frac{d}{dx}(af+bg) = a\frac{d}{dx}f + b\frac{d}{dx}g$$

を満たす。

例 3.3. Laplace 変換作用素：

$$\mathcal{L} \coloneqq \int_0^\infty dx\ e^{-px}$$

は線型作用素である。但し，Laplace 変換作用素は f に対して

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty dx\ e^{-px} f(x)$$

のように作用するものとする。実際，積分は線型性を持つから，

$$\mathcal{L}[af+bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

である。このように，関数の変数を変えるような操作（別の関数空間に写す写像）も線型である場合がある。Laplace 変換は，微分方程式を代数方程式に置き換えることができる強力な道具でもある。

注意 3.4. 本書では関数 $f(x)$ を a から b まで積分することを，

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ではなく，

$$\int_a^b dx\,f(x)$$

と表記するが，これは，積分作用素 I を，

$$I \coloneqq \int_a^b dx$$

で定めたとき，

$$I[f] = \int_a^b dx\,f(x)$$

のように見ることができるからである。積分作用素も線型である。微分作用素は左から掛けると微分されたが，積分作用素は左から掛けると積分される。$\int dx\ f(x)$ の順に書くことで関数に対する操作を切り離して考えやすくなる。また，重積分の際にも積分変数が見やすくなる。

微分作用素は線型なので，$f(x)$ が x の冪級数として，

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n$$

と表されるなら，これに微分作用素を施したものは，形式的に項別微分したもの：

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^\infty c_n x^n = \sum_{n=0}^\infty c_n \frac{d}{dx}x^n = \sum_{n=0}^\infty c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty c_{n+1}\cdot(n+1)x^n$$

として表せる。尚，$x^0=1$ に関しても，

$$\frac{d}{dx}x^0=\frac{d}{dx}1=0=0\cdot x^{-1}$$

と見れば成立しているので $n=0$ の場合も成立していると考える。

定義 3.5 (固有関数)**.** 線型作用素 T に対して，

$$Tf=\lambda f$$

を満たす f を T の固有関数，λ をその固有値という。

f が 0 の場合は T の種類に依らずに $T\cdot 0=0\cdot 0$ を満たしてしまうので，0 は固有関数から除外する場合が多い。但し，固有空間を考える場合は 0 も固有空間に属すると考える。

例 3.6. e^{ax} は，微分作用素 $\frac{d}{dx}$ に対する固有値 a の固有関数である。実際，

$$\frac{d}{dx}e^{ax}=ae^{ax}$$

となるから固有関数の条件を満たしている。

例 3.7. e^{ikx}, e^{-ikx}, $\cos(kx)$, $\sin(kx)$ は共に微分作用素 $\frac{d^2}{dx^2}$ の固有値 $-k^2$ の固有関数である。実際，

$$\frac{d}{dx}e^{ikx}=ike^{ikx},\ \frac{d}{dx}e^{-ikx}=-ike^{-ikx},$$
$$\frac{d}{dx}\cos(kx)=-k\sin(kx),\ \frac{d}{dx}\sin(kx)=k\cos(kx)$$

であり，

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{ikx}=-k^2e^{ikx},\ \frac{d^2}{dx^2}e^{-ikx}=-k^2e^{-ikx}$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\cos(kx)=-k^2\cos(kx),\ \frac{d^2}{dx^2}\sin(kx)=-k^2\sin(kx)$$

であるから成立している。

これは，Euler の公式

$$e^{ikx}=\cos(kx)+i\sin(kx)$$

と直接関係していて，

$$\cos(kx)=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2},\ \sin(kx)=\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$$

であって，右辺が $\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であることから，自動的に左辺も $\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であることが従う。これは，以下の 2 階線型常微分方程式：

$$y''+k^2y=0$$

の解空間が 2 次元であり，e^{ikx} と e^{-ikx} が線型独立な 2 解であることにも関係する。

3.2 Euler 作用素

一般に，線型作用素が関数にどのように作用するかを知りたいなら，（収束性が問題にならない場合）基底にどのように働くかだけを見ればよい。

定義 3.8 (Euler 作用素)**.** x の関数に対する Euler 作用素 ϑ を，

$$\vartheta := x\frac{d}{dx}$$

で定める[*10]。微分作用素は線型作用素なので，Euler 作用素も線型作用素である。

Euler 作用素については付録 H にも記した。

まずは試しに冪関数 x^λ に作用させてみよう。計算してみると，

$$\vartheta x^\lambda = x\frac{d}{dx}x^\lambda = x \cdot \lambda x^{\lambda-1} = \lambda x^\lambda$$

となる。従って，x^λ は線型作用素 ϑ の固有値 λ の固有関数とみなせる。尚，$\lambda = 0$，すなわち定数に作用させる場合でも，$\vartheta \cdot 1 = 0 = 0 \cdot x^0$ と見れるので，どんな λ でも $\vartheta x^\lambda = \lambda x^\lambda$ と考えてよい。

次に，x の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

と展開されているとする。これに ϑ を作用させてみると，ϑ は線型であるから

$$\vartheta f(x) = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x\frac{d}{dx}x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n$$

となり，x^n の係数を n 倍することが分かる。

次に，定数 a を用いて，$a + \vartheta$ を作用させてみると，

$$(a+\vartheta)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a+\vartheta) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a x^n + \vartheta x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (a+n) x^n$$

となる。

続けて $b + \vartheta$ を続けて作用させてみると，

$$\begin{aligned}
&(b+\vartheta)(a+\vartheta)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= (b+\vartheta)\left[(a+\vartheta)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \\
&= (b+\vartheta)\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (a+n) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (a+n)(b+\vartheta) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (a+n)(b+n) x^n
\end{aligned}$$

[*10] ϑ は θ の変種文字である。尚，θ と書くこともある。

となる。特に，$(a+n)(b+n)=(b+n)(a+n)$ であるから，

$$(a+\vartheta)(b+\vartheta)f=(b+\vartheta)(a+\vartheta)f$$

であることにも注意。

これを用いて Gauss の超幾何級数：

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\middle|\,x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}x^n$$

が満たす微分方程式を求めてみよう。

3.3 Gauss の超幾何微分方程式

Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1(a,\,b\,;\,c\,;\,x)$ における x^n の係数を c_n と置く。すなわち，

$$c_n:=\frac{(a,b)_n}{(c,1)_n}$$

とする。命題 B.5：

$$(a)_{n+1}=(a+n)(a)_n$$

を用いると，

$$c_{n+1}=\frac{(a,b)_{n+1}}{(c,1)_{n+1}}=\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}=\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}\cdot\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}=\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}c_n$$

より，

$$(1+n)(c+n)c_{n+1}=(a+n)(b+n)c_n$$

である。両辺に x^n を掛けて n についての和を考えてみる。右辺については，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a+n)(b+n)c_nx^n=(a+\vartheta)(b+\vartheta)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=(a+\vartheta)(b+\vartheta)\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\middle|\,x\right]$$

である。

左辺は添字が 1 ずれているから少しややこしいが，$1+n$ の因子のお陰で，$n=-1$ の項を付け加えても影

響しないから $n=-1$ からの和にしてもよく，$n+1 \mapsto n$ に置き換えて $n=0$ からの和に直せば，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)(c+n)c_{n+1}x^n \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)(c+n)c_{n+1}x^{n+1} \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n=-1}^{\infty}(1+n)(c+n)c_{n+1}x^{n+1} \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}n(c+n-1)c_n x^n \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(0+n)(c-1+n)c_n x^n \\
&= \frac{1}{x}\cdot(0+\vartheta)(c-1+\vartheta)\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \\
&= \frac{1}{x}\cdot\vartheta(c-1+\vartheta)\ {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\right|\,x\right]
\end{aligned}$$

となる。

これらにより Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1(a,\,b\,;\,c\,;\,x)$ は，

$$\left[\frac{1}{x}\cdot\vartheta(c-1+\vartheta)-(a+\vartheta)(b+\vartheta)\right]{}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\right|\,x\right]=0$$

を満たすから，

$$\left[\frac{1}{x}\cdot\vartheta(c-1+\vartheta)-(a+\vartheta)(b+\vartheta)\right]y=0$$

の解のひとつであることが判った。

Euler 作用素を微分作用素 $\frac{d}{dx}$ に書き直してみよう。一般的な場合は付録 H の定理 H.7 で詳しく証明しているが，ここでは ϑ^2 までしか出てこないのでこの場で計算してしまおう。ϑ^2 は $\frac{d}{dx}$ を用いるとどのように書き換わるか計算してみると，

$$\vartheta^2 f = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}f\right)=x\left(\frac{d}{dx}f+x\frac{d^2}{dx^2}f\right)=\left(x\frac{d}{dx}+x^2\frac{d^2}{dx^2}\right)f$$

であることが分かる。つまり，

$$\vartheta^2 = x\frac{d}{dx}+x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(=\vartheta+x^2\frac{d^2}{dx^2}\right)$$

と書き換えればよい。

順に計算してみよう。最初の部分は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x} \cdot \vartheta(c-1+\vartheta) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left[(c-1)\vartheta + \vartheta^2\right] \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left[(c\vartheta - \vartheta) + \left(\vartheta + x^2 \frac{d^2}{dx^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left[cx\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}\right] \\
&= c\frac{d}{dx} + x\frac{d^2}{dx^2}
\end{aligned}
$$

である。

次の部分は，

$$
\begin{aligned}
&(a+\vartheta)(b+\vartheta) \\
&= ab + (a+b)\vartheta + \vartheta^2 \\
&= ab + (a+b)\vartheta + \vartheta + x^2\frac{d^2}{dx^2} \\
&= ab + (a+b+1)x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}
\end{aligned}
$$

である。

これより，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x} \cdot \vartheta(c-1+\vartheta) - (a+\vartheta)(b+\vartheta) \\
&= \left(c\frac{d}{dx} + x\frac{d^2}{dx^2}\right) - \left(ab + (a+b+1)x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}\right) \\
&= x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{d}{dx} - ab
\end{aligned}
$$

が得られるので，Gauss の超幾何級数は $y = {}_2F_1(a,\, b\,;\, c\,;\, x)$ としたとき，

$$
\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + \{c-(a+b+1)x\}\frac{d}{dx} - ab\right]y = 0
$$

すなわち，

$$
x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0 \tag{3.1}
$$

を満たす。(3.1) 式のことを Gauss の超幾何微分方程式という。

一般に，2 階線型常微分方程式には独立な解が 2 つあるはずなので，(3.1) を満たし，$y_1 = {}_2F_1(a,\, b\,;\, c\,;\, x)$ と独立な解がもうひとつあるはずであるが，それは Frobenius の方法を説明してから述べることにする。

3.4 一般化超幾何微分方程式

前節で，

$$
(a+\vartheta)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (a+n)x^n
$$

を導いたが，$c_n = (a)_n$ である場合を考えよう。命題 B.9 の結果：

$$(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$$

を用いると，

$$(a+\vartheta)\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a+n)(a)_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a)_{n+1} x^n$$

である。

このことを利用して，一般化超幾何級数：

$${}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s, 1)_n} x^n$$

が満たす微分方程式を求めてみよう。

Gauss の超幾何微分方程式を導いたときは，x^n の係数を c_n と置いて，c_{n+1} と c_n の間の漸化式から (3.1) 式を導いた。ここでは先に一般化超幾何微分方程式を与えてしまって，一般化超幾何級数がその微分方程式を満たすことを直接確かめてしまおう。

定理 3.9. 一般化超幾何級数 ${}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, x\right]$ は，一般化超幾何微分方程式：

$$\left\{\frac{1}{x} \cdot \vartheta \prod_{j=1}^{s}(b_j - 1 + \vartheta) - \prod_{k=1}^{r}(a_k + \vartheta)\right\} y = 0$$

の解である。

Proof.

$$\left[\frac{1}{x} \cdot \vartheta \prod_{j=1}^{s}(b_j - 1 + \vartheta)\right] {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, x\right] = \left[\prod_{k=1}^{r}(a_k + \vartheta)\right] {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, x\right]$$

を満たすことを確認する。実際，

$$\begin{aligned}
&\left[\prod_{k=1}^{r}(a_k + \vartheta)\right] {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, x\right] \\
&= \left[\prod_{k=1}^{r}(a_k + \vartheta)\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s, 1)_n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r)_{n+1}}{(b_1, \dots, b_s, 1)_n} x^n \\
&= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{(1+n) \prod_{j=1}^{s}(b_j + n)\right\} \frac{(a_1, \dots, a_r)_{n+1}}{(b_1, \dots, b_s, 1)_{n+1}} x^{n+1} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{n \prod_{j=1}^{s}(b_j - 1 + n)\right\} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s, 1)_n} x^n \\
&= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{n \prod_{j=1}^{s}(b_j - 1 + n)\right\} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s, 1)_n} x^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} \cdot \left\{ \vartheta \prod_{j=1}^{s} (b_j - 1 + \vartheta) \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \ldots, a_r)_n}{(b_1, \ldots, b_s, 1)_n} x^n \\
&= \left[\frac{1}{x} \cdot \vartheta \prod_{j=1}^{s} (b_j - 1 + \vartheta) \right] {}_rF_s \left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} \middle| \, x \right]
\end{aligned}
$$

であるから成立。 □

Euler 作用素を微分作用素で書き直せば，一般化超幾何微分方程式は，

$$
\left\{ \frac{d}{dx} \prod_{j=1}^{s} \left(b_j - 1 + x\frac{d}{dx} \right) - \prod_{k=1}^{r} \left(a_k + x\frac{d}{dx} \right) \right\} y = 0
$$

と書き直せる。

例 3.10 (Kummer の合流型超幾何微分方程式)**.** ${}_1F_1(a\,;\,b\,;\,x)$ を Kummer の合流型超幾何関数と呼ぶ。一般化超幾何微分方程式において $r = s = 1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(b - 1 + x\frac{d}{dx} \right) - \left(a + x\frac{d}{dx} \right) \\
&= x\frac{d^2}{dx^2} + (b - x)\frac{d}{dx} - a
\end{aligned}
$$

であるから，$y = {}_1F_1(a\,;\,b\,;\,x)$ は Kummer の合流型超幾何微分方程式：

$$
xy'' + (b - x)y' - ay = 0
$$

を満たす。

A　Gamma 関数

Gamma 関数は階乗 $n!$ の一般化としても知られているが，特殊関数の関数等式を結びつける際にも重宝する。以降の記述の多くは [8] を参考にしているが，[8] の定理を出発点（定義）にして，[8] の定義を定理として導くようなスタイルを採った。それぞれ議論の流れが異なるので，[8] も併せて参照されたい。

A.1　無限積表示

定義 A.1 (Gamma 関数)**.** Gamma 関数を以下で定義する：

$$
\Gamma(z) \coloneqq \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{z+n} e^{\frac{z}{n}} \right)
$$

γ は Euler 定数[*11]で，

$$
\gamma \coloneqq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.57721566490153286060651209008 2\cdots
$$

[*11] Euler-Mascheroni 定数と呼ばれることもある。

である[*12]。

一般に，Gamma 関数は積分を用いて定義されることが多い。上のような無限積表示で定めておくと，Gamma 関数の極の位置 $z=-n$ ($n \in \mathbb{N}$) が分かりやすい。また，対数微分を計算しやすい。

問 A.1. Gamma 関数の対数微分：

$$\psi(z) \coloneqq \frac{d}{dz}\ln(\Gamma(z))$$

を digamma 関数と呼ぶ。

(1) Gamma 関数の定義式の対数を取ったものを項別微分することにより，

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right)$$

が成立することを示せ。

(2) $\ln(1+x)$ の冪級数展開に $x=1$ を代入して得られる等式：

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

を用いて，

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln(2)$$

を示せ。但し，途中で和の順序を入れ替える必要がある。

命題 A.2 (Gamma 関数の Euler 乗積表示)**.**

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n^z n! \prod_{k=0}^{n}\frac{1}{z+k}$$

が成立する。

Proof. Gamma 関数の逆数を変形していくと，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} =& z e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \\
=& z\lim_{n\to\infty} e^{z\left(-\ln n + \sum_{k=1}^{n} 1/k\right)}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \\
=& z\lim_{n\to\infty} n^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) \\
=& \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^z n!}\prod_{k=0}^{n}(z+k)
\end{aligned}$$

となる。これより，

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n^z n! \prod_{k=0}^{n}\frac{1}{z+k}$$

である。 □

[*12] 現在，Euler 定数 γ は無理数であるかどうかすら不明らしい。

これを用いて $\Gamma(1)$ の値を計算してみると，

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \lim_{n\to\infty} n^1 n! \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1\end{aligned}$$

を得る。

命題 A.3 (階乗の一般化)**.**

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

が成立する。特に，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\Gamma(n+1) = n!$$

である。

Proof.

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} n^{z+1} n! \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{z+1+k} \\ &= \lim_{n\to\infty} z\cdot \frac{n}{n+z+1} \cdot n^z n! \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{z+k} \\ &= z \lim_{n\to\infty} n^z n! \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{z+k} \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

よって $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ である。$\Gamma(1) = 1 = 0!$ と，数学的帰納法によって，$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) = n!$ が言える。 □

A.2　相反公式

定理 A.4 (Gamma 関数の相反公式)**.**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

が成立する。

Proof.

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= -z\Gamma(z)\Gamma(-z) \\ &= -z\left(\frac{e^{\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+z}e^{z/n}\right)\right)\left(\frac{e^{-\gamma z}}{-z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-z}e^{-z/n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-z^2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\end{aligned}$$

但し，最後の等号で正弦関数の無限積展開の公式 (定理 D.7) から導かれる，

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

を用いている。 □

相反公式で $z = \frac{1}{2}$ とすることで $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$ となる。定義式から $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ であるから，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{A.1}$$

が分かる。これは Gauss 積分の値を計算するときにも使える。

問 A.2. 以下の等式を証明せよ：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$

問 A.3. n を自然数とするとき，

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

が成立することを示せ。

命題 A.5 (Gamma 関数の極と留数)**.** $z = -n$ $(n \in \mathbb{N})$ は Gamma 関数 $\Gamma(z)$ の 1 位の極であり，その留数は $\frac{(-1)^n}{n!}$ である。

Proof. Gamma 関数の相反公式から，

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z \to -n} \frac{1}{\Gamma(1-z)} \cdot \frac{\pi(z+n)}{\sin(\pi z)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+n)} \cdot \lim_{z \to -n} \frac{\pi}{\pi \cos(\pi z)} \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{\cos(n\pi)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

である。 □

A.3 積分表示

定理 A.6 (Gamma 関数の積分表示[*13])**.** $\mathrm{Re}(z) > 0$ であるような複素数 z について，

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt\ t^{z-1} e^{-t}$$

が成立する。

[*13] この定理の証明には [9] における §1.2 の議論を参考にした。[9] は Gamma 関数の定義に積分表示を採用しているので，本書とは前提と結論がちょうど入れ替わっている。[9] のスタイルの方が一般的なので，そちらも参照されたい。

Proof. 自然数 n に対して，

$$G_n(z) \coloneqq \int_0^n dt\ t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

と置く。$t = nu$ とすれば，

$$G_n(z) = n^z \int_0^1 du\ u^{z-1}(1-u)^n$$

となる。

$$g_n(z) \coloneqq \int_0^1 du\ u^{z-1}(1-u)^n$$

とすると，$n \geq 1$ については

$$\begin{aligned} g_n(z) &= \int_0^1 du\ u^{z-1}(1-u)^n \\ &= \left[\frac{u^z}{z}(1-u)^n\right]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 du\ u^z(1-u)^{k-1} \\ &= \frac{n}{z}g_{n-1}(z) \end{aligned}$$

となる。$n = 0$ のときは，

$$g_0(z) = \int_0^1 du\ u^{z-1} = \frac{1}{z}$$

となるので，

$$g_n(z) = n! \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{z+k}$$

が従う。これより，

$$G_n(z) = n^z n! \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{z+k}$$

であって，命題 A.2 から，

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = \Gamma(z)$$

である。他方，$G_n(z)$ の定義から，

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} G_n(z) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^n dt\ t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \\ &= \int_0^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t} \end{aligned}$$

となる。 □

問 A.4. 問 A.1 で定義された $\psi(z)$ を用いると，

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z)\psi(z)$$

と表せることを用いて，

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty dt\ e^{-t}\ln(t) = -\gamma$$

を証明せよ。

命題 A.7 (Gauss 積分)**.** 以下が成立する：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Proof. 被積分関数が偶関数であることと，変数変換 $x = \sqrt{t}$ を用いると，

$$dx = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2}dt$$

であるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} = 2\int_{0}^{\infty} dx\ e^{-x^2} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2}dt\ e^{-t} = \int_{0}^{\infty} dt\ t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

を得る。但し，最後の等号で (A.1) 式の結果を用いた。 □

命題 A.8 (Gauss 積分の一般化 その 1)**.** 任意の非負整数 n，正整数 m，正の実数 a に対して以下が成立する：

$$\int_{0}^{\infty} dx\ x^n e^{-ax^m} = \frac{a^{-\frac{n+1}{m}}}{m}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

Proof. 変数変換 $t = ax^m$ を用いると，$x = a^{-\frac{1}{m}}t^{\frac{1}{m}}$ であるから，

$$dx = \frac{a^{-\frac{1}{m}}t^{-1+\frac{1}{m}}}{m}dt$$

であり，$a > 0$ を仮定しているから積分区間は変わらないので，

$$\int_{0}^{\infty} dx\ x^n e^{-ax^m} = \int_{0}^{\infty} \frac{a^{-\frac{1}{m}}t^{-1+\frac{1}{m}}}{m}dt\ a^{-\frac{n}{m}}t^{\frac{n}{m}}e^{-t} = \frac{a^{-\frac{(n+1)}{m}}}{m}\int_{0}^{\infty} dt\ t^{\frac{n+1}{m}-1}e^{-t} = \frac{a^{-\frac{n+1}{m}}}{m}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

を得る。 □

例 A.9. 命題 A.8 の具体値は表 A.1 に示した。

命題 A.10 (Gauss 積分の一般化 その 2)**.** m を正整数とする。$c_{2m} < 0$ であるような任意の実数列 $\{c_n\}_{0\leq n\leq 2m}$ に対して以下が成立する：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp\left(\sum_{k=0}^{2m} c_k x^k\right) \\
&= \frac{(-c_{2m})^{-\frac{1}{2m}}e^{c_0}}{m} \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{2m-1})\in\mathbb{N}^{2m-1} \\ a_1+a_3+\cdots+a_{2m-1}\equiv 0 \pmod{2}}} \Gamma\left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m-1} ka_k\right) \prod_{\ell=1}^{2m-1} \frac{c_\ell^{a_\ell}(-c_{2m})^{-\frac{\ell a_\ell}{2m}}}{a_\ell!}
\end{aligned}$$

Proof. 一般形は少々厳めしいが，順に追えばそれぞれは単純な計算である。まずは，非負整数 n，正整数 m，正の実数 a に対して成立する以下の等式を示す：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^n e^{-ax^{2m}} = \frac{1+(-1)^n}{2m}a^{-\frac{n+1}{2m}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2m}\right).$$

n が奇数の場合，被積分関数は奇関数なので 0 となり，n が偶数の場合は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^n e^{-ax^{2m}} = 2\int_{0}^{\infty} dx\ x^n e^{-ax^{2m}} = 2\cdot\frac{a^{-\frac{n+1}{2m}}}{2m}\Gamma\left(\frac{n+1}{2m}\right)$$

である。但し，命題 A.8 で示した結果を用いた。これらを合わせて表記すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^n e^{-ax^{2m}} = (1+(-1)^n)\int_0^{\infty} dx\ x^n e^{-ax^{2m}} = \frac{1+(-1)^n}{2m} a^{-\frac{n+1}{2m}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2m}\right)$$

となる。

これを用いて主張の式を示す。まず，指数法則により，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp\left(\sum_{k=0}^{2m} c_k x^k\right) = e^{c_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{c_{2m}x^{2m}} \exp\left(\sum_{k=1}^{2m-1} c_k x^k\right)$$

である。被積分関数の後半を Maclaurin 展開し，多項定理を用いると，

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\sum_{k=1}^{2m-1} c_k x^k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{2m-1} c_k x^k\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{a_1+\cdots+a_{2m-1}=n} \frac{n!}{a_1!\cdots a_{2m-1}!}(c_1 x)^{a_1}\cdots(c_{2m-1}x^{2m-1})^{a_{2m-1}} \\
&= \sum_{(a_1,\ldots,a_{2m-1})\in\mathbb{N}^{2m-1}} \frac{c_1^{a_1}\cdots c_{2m-1}^{a_{2m-1}}}{a_1!\cdots a_{2m-1}!} x^{a_1+2a_2+\cdots+(2m-1)a_{2m-1}} \\
&= \sum_{(a_1,\ldots,a_{2m-1})\in\mathbb{N}^{2m-1}} x^{a_1+2a_2+\cdots+(2m-1)a_{2m-1}} \prod_{k=1}^{2m-1} \frac{c_k^{a_k}}{a_k!}
\end{aligned}$$

となる。これを元の式に代入して積分と和の順序交換を行うと，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp\left(\sum_{k=0}^{2m} c_k x^k\right) \\
&= e^{c_0} \sum_{(a_1,\ldots,a_{2m-1})\in\mathbb{N}^{2m-1}} \prod_{k=1}^{2m-1} \frac{c_k^{a_k}}{a_k!} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{c_{2m}x^{2m}} x^{a_1+2a_2+\cdots+(2m-1)a_{2m-1}} \\
&= e^{c_0} \sum_{(a_1,\ldots,a_{2m-1})\in\mathbb{N}^{2m-1}} \left(\prod_{k=1}^{2m-1} \frac{c_k^{a_k}}{a_k!}\right) \frac{1+(-1)^{a_1+2a_2+\cdots+(2m-1)a_{2m-1}}}{2m} \\
&\quad \times (-c_{2m})^{-(1+a_1+2a_2+\cdots+(2m-1)a_{2m-1})/2m} \\
&\quad \times \Gamma\left(\frac{1+a_1+2a_2+\cdots+(2m-1)a_{2m-1}}{2m}\right)
\end{aligned}$$

のようになる。

途中の因子の分子にある $1+(-1)^{a_1+2a_2+\cdots+(2m-1)a_{2m-1}}$ に着目すると，$a_1+2a_2+\cdots+(2m-1)a_{2m-1}$

が奇数だと 0 になるため，これが偶数になる部分だけ取ればよく，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2m-1} k a_k \equiv 0 \pmod 2 \\
\iff &\sum_{k=1}^{m} (2k-1) a_{2k-1} + \sum_{\ell=1}^{m-1} 2\ell a_{2\ell} \equiv 0 \pmod 2 \\
\iff &\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} \equiv 0 \pmod 2
\end{aligned}
$$

が条件である。この条件の下では $1+(-1)^{a_1+2a_2+\cdots+(2m-1)a_{2m-1}} = 2$ であるから，それを適用し，その他の因子も総和・相乗記号を用いて書き直せば，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp\left(\sum_{k=0}^{2m} c_k x^k\right) \\
&= \frac{(-c_{2m})^{-\frac{1}{2m}} e^{c_0}}{m} \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{2m-1})\in\mathbb{N}^{2m-1} \\ a_1+a_3+\cdots+a_{2m-1}\equiv 0 \pmod{2}}} \Gamma\left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m-1} k a_k\right) \prod_{\ell=1}^{2m-1} \frac{c_\ell^{a_\ell} (-c_{2m})^{-\frac{\ell a_\ell}{2m}}}{a_\ell !}
\end{aligned}
$$

が得られる。 □

A.4 Beta 関数

定義 A.11 (Beta 関数)**.** Beta 関数 $B(z,w)$ を以下のように定義する[*14]：

$$
B(z,w) \coloneqq \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}
$$

定理 A.12 (Beta 関数の積分表示)**.** $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Re}(w) > 0$ であるような複素数 z, w に対して，

$$
B(z,w) = \int_0^1 dt\ t^{z-1}(1-t)^{w-1}
$$

が成立する。

Proof. Beta 関数の定義と，Gamma 関数の積分表示を用いて，

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z+w)B(z,w) &= \Gamma(z)\Gamma(w) \\
&= \left(\int_0^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t}\right)\left(\int_0^\infty du\ u^{w-1}e^{-u}\right) \\
&= \int_0^\infty dt \int_0^\infty du\ t^{z-1}u^{w-1}e^{-t-u} \quad (u \coloneqq x-t) \\
&= \int_0^\infty dt \int_t^\infty dx\ t^{z-1}(x-t)^{w-1}e^{-x} \\
&= \int_0^\infty dx \int_0^x dt\ t^{z-1}(x-t)^{w-1}e^{-x} \quad (t \coloneqq ux)
\end{aligned}
$$

[*14] 一般には，Beta 関数も積分を用いて定義されることが多い。

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty dx \int_0^1 du\ x \cdot x^{z-1} u^{z-1} x^{w-1} (1-u)^{w-1} e^{-x} \\
&= \left(\int_0^\infty dx\ x^{z+w-1} e^{-x} \right) \left(\int_0^1 du\ u^{z-1} (1-u)^{w-1} \right) \\
&= \Gamma(z+w) \int_0^1 du\ u^{z-1} (1-u)^{w-1}
\end{aligned}
$$

である。Gamma 関数は零点を持たないから，

$$B(z,w) = \int_0^1 dt\ t^{z-1}(1-t)^{w-1}$$

である。 □

問 A.5. Beta 関数の積分表示を利用した例題をいくつか挙げる。

(1) m, n を自然数，a, b を実数とするとき，

$$\int_a^b dx\,(x-a)^m (b-x)^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}$$

が成立することを示せ。

(2) 複素数 z, w が $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\mathrm{Re}(w) > 0$ を満たすとき，

$$B(z,w) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\ (\cos(\theta))^{2z-1} (\sin(\theta))^{2w-1}$$

が成立することを示せ。

(3) 上の結果を用いて，n を自然数とするとき，

$$\int_0^\pi d\theta\ (\sin(\theta))^{2n}$$

を求めよ。

問 A.6. p, q を正の実数とし，以下の積分：

$$I(p,q) \coloneqq \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^p)^q}$$

について考える。

(1) $I(p,q)$ の収束条件は $pq > 1$ であることを示せ。

(2) $I(p,q)$ は，Beta 関数を用いて，

$$I(p,q) = \frac{1}{p} B\left(q - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)$$

と表せることを示せ。

(3) $q = 1$ のとき，

$$I(p,1) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^p} = \frac{\pi}{p\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

が成立することを示せ。

A.5 倍角公式

定理 A.13 (Legendre の倍角公式)**.**

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

Proof. 関数 f を，

$$f(z) \coloneqq \int_{-1}^{1} dt\ \left(1-t^2\right)^{z-1}$$

と定める。右辺の積分を 2 通りの方法で計算する。

(i) 被積分関数は偶関数であるから，

$$f(z) \coloneqq 2\int_{0}^{1} dt\ \left(1-t^2\right)^{z-1}$$

となる。$t=\sqrt{u}$ と置換すると，

$$\begin{aligned} f(z) &= 2\int_0^1 du\ (1-u)^{z-1}\cdot 2^{-1}u^{-\frac{1}{2}} \\ &= B\left(z,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(z)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

(ii) $x=2u-1$ と置換すると，$1-x^2=4u(1-u)$ であるから，

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^1 du\ 4^{z-1}u^{z-1}(1-u)^{z-1}\cdot 2 \\ &= 2^{2z-1}B(z,z) = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} \end{aligned}$$

これらを比較すると，

$$f(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(z)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = 2^{2z-1}B(z,z) = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)}$$

であるから，

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

を得る。 □

　これは，

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

とも書ける。

表 A.1　Gauss 積分 $\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x^m}$ の具体値 $(0 \leq n < m \leq 13)$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$	$\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{1}{5})$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{1}{6})$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{1}{7})$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{1}{8})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{1}{9})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{1}{10})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{1}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{1}{12})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{1}{13})$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{2}{3})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{2}{5})$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{1}{3})$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{2}{7})$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{1}{4})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{2}{9})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{1}{5})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{2}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{1}{6})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{2}{13})$
2	2	$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\Gamma(\frac{3}{4})$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{3}{5})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{6}$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{3}{7})$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{3}{8})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{1}{3})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{3}{10})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{3}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{1}{4})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{3}{13})$
3	6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{4}{3})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{4}{5})$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{2}{3})$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{4}{7})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{8}$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{4}{9})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{2}{5})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{4}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{1}{3})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{4}{13})$
4	24	$\frac{3\sqrt{\pi}}{8}$	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{5}{3})$	$\frac{1}{4}\Gamma(\frac{5}{4})$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{5}{6})$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{5}{7})$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{5}{8})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{5}{9})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{10}$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{5}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{5}{12})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{5}{13})$
5	120	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{8}$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{6}{5})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{6}{7})$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{3}{4})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{2}{3})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{3}{5})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{6}{11})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{12}$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{6}{13})$
6	720	$\frac{15\sqrt{\pi}}{16}$	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{7}{3})$	$\frac{1}{4}\Gamma(\frac{7}{4})$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{7}{5})$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{7}{6})$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{7}{8})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{7}{9})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{7}{10})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{7}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{7}{12})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{7}{13})$
7	5040	3	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{8}{3})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{8}{5})$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{4}{3})$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{8}{7})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{8}{9})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{4}{5})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{8}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{2}{3})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{8}{13})$
8	40320	$\frac{105\sqrt{\pi}}{32}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}\Gamma(\frac{9}{4})$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{9}{5})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{12}$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{9}{7})$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{9}{8})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{9}{10})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{9}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{3}{4})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{9}{13})$
9	362880	12	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{10}{3})$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{16}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{5}{3})$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{10}{7})$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{5}{4})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{10}{9})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{10}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{5}{6})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{10}{13})$
10	3628800	$\frac{945\sqrt{\pi}}{64}$	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{11}{3})$	$\frac{1}{4}\Gamma(\frac{11}{4})$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{11}{5})$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{11}{6})$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{11}{7})$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{11}{8})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{11}{9})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{11}{10})$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{11}{12})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{11}{13})$
11	39916800	60	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{12}{5})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{12}{7})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{16}$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{4}{3})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{6}{5})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{12}{11})$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{12}{13})$
12	479001600	$\frac{10395\sqrt{\pi}}{128}$	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{13}{3})$	$\frac{1}{4}\Gamma(\frac{13}{4})$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{13}{5})$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{13}{6})$	$\frac{1}{7}\Gamma(\frac{13}{7})$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{13}{8})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{13}{9})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{13}{10})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{13}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{13}{12})$	$\frac{1}{13}$
13	6227020800	360	$\frac{1}{3}\Gamma(\frac{14}{3})$	$\frac{15\sqrt{\pi}}{32}$	$\frac{1}{5}\Gamma(\frac{14}{5})$	$\frac{1}{6}\Gamma(\frac{7}{3})$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}\Gamma(\frac{7}{4})$	$\frac{1}{9}\Gamma(\frac{14}{9})$	$\frac{1}{10}\Gamma(\frac{7}{5})$	$\frac{1}{11}\Gamma(\frac{14}{11})$	$\frac{1}{12}\Gamma(\frac{7}{6})$	$\frac{1}{13}\Gamma(\frac{14}{13})$

B Pochhammer 記号

この章では Pochhammer 記号についての公式をまとめる。出典の多くは [8] による。

定義 B.1 (Pochhammer 記号)**.** a を複素数，n を整数とする。Pochhammer 記号 $(a)_n$ とは，Gamma 関数 $\Gamma(z)$ を用いて，

$$(a)_n \coloneqq \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

と定義されるものである。

定義 B.2 (Pochhammer 記号の積)**.** （この章では直接用いることはないが，）Pochhammer 記号の積を，

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m)_n \coloneqq \prod_{k=1}^{m} (a_k)_n = \frac{\Gamma(a_1+n)\Gamma(a_2+n)\cdots\Gamma(a_m+n)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_m)}$$

と表記することがある。

Gamma 関数を用いた定義をすれば，n は整数である必要はないが，実用上はほとんど整数に限ってよい。以降，特に断りがなければ a, b を複素数，n, k を自然数とする。

命題 B.3.

$$(1)_n = n!$$

Proof. n を自然数としたとき，$\Gamma(n+1) = n!$ に注意すれば，

$$(1)_n = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)} = \frac{n!}{0!} = n!$$

となる。 □

命題 B.4. m を自然数とし，n は $m+1 \leq n$ を満たす自然数であるとすると，

$$(-m)_n = 0$$

である。

Proof. m を自然数としたとき, $\Gamma(-m)$ は 1 位の極になっていることを用いる。$-m+n \geq 1$ だから $\Gamma(-m+n)$ は有限の値を取るので，

$$(-m)_n = \frac{\Gamma(-m+n)}{\Gamma(-m)} = 0$$

である。 □

命題 B.4 は，超幾何級数が有限次の多項式になるための条件を導く際に用いる。これは，偏微分方程式を変数分離した際に出てくる定数の条件を，解が発散しないための条件（超幾何級数が有限次で切れる）から決める際にも用いる[*15]。

[*15] 例えば，水素原子の Schrödinger 方程式の θ 方向の方程式（Legendre の陪微分方程式）が，$\theta = 0, \pi$ で発散しないための条件

命題 B.5.

$$n+a=a\cdot\frac{(a+1)_n}{(a)_n}$$
$$an+b=b\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}+1\right)_n}{\left(\frac{b}{a}\right)_n}$$

Proof. 1 つ目は，

$$\begin{aligned}n+a&=(n+a)\cdot\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+a)}=\frac{\Gamma(a+1+n)}{\Gamma(a+1)}\cdot\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(n+a)}\cdot\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}\\&=(a+1)_n\cdot\frac{1}{(a)_n}\cdot a=a\cdot\frac{(a+1)_n}{(a)_n}\end{aligned}$$

とすればよい。

2 つ目は，直前に示した式を用いて，

$$an+b=a\left(n+\frac{b}{a}\right)=a\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}+1\right)_n}{\left(\frac{b}{a}\right)_n}=b\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}+1\right)_n}{\left(\frac{b}{a}\right)_n}$$

である。 □

命題 B.5 は，Maclaurin 級数が既知であるような冪級数を超幾何級数表示に直す際に，最も頻繁に用いる公式である。

命題 B.6.

$$(a)_0=1$$
$$(a)_n=\prod_{k=0}^{n-1}(a+k)\quad(n\geq 1)$$
$$(a)_{-n}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{a-k}\quad(n\geq 1)$$

Proof. 1 つ目は定義から，

$$(a)_0=\frac{\Gamma(a+0)}{\Gamma(a)}=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)}=1$$

となる。

2 つ目は，分子に対して $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$ を繰り返し用いれば，

$$\begin{aligned}(a)_n&=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=\frac{(a+n-1)\Gamma(a+n-1)}{\Gamma(a)}=\frac{(a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2)}{\Gamma(a)}=\cdots\\&=\frac{(a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a\Gamma(a)}{\Gamma(a)}=(a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a\\&=\prod_{k=0}^{n-1}(a+k)\end{aligned}$$

となる。

3 つ目は分母に対して同じように，

$$
\begin{aligned}
(a)_{-n} &= \frac{\Gamma(a-n)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(a-n)}{(a-1)\Gamma(a-1)} = \frac{\Gamma(a-n)}{(a-1)(a-2)\Gamma(a-2)} = \cdots \\
&= \frac{\Gamma(a-n)}{(a-1)(a-2)\cdots(a-n)\Gamma(a-n)} = \frac{1}{(a-1)(a-2)\cdots(a-n)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a-k}
\end{aligned}
$$

□

超幾何級数の定数項が必ず 1 であるという事実は，$(a)_0 = 1$ から出てくる。

命題 B.7.

$$
\begin{aligned}
(a)_n &= (-1)^n (1-n-a)_n \\
(a)_{-n} &= \frac{(-1)^n}{(1-a)_n} \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

Proof. Gamma 関数の相反公式（定理 A.4）：

$$
\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}
$$

を用いる。三角関数の加法定理などから，$\sin(\pi(a+n)) = (-1)^n \sin(\pi a)$ が成立することに注意して，

$$
\begin{aligned}
(-1)^n (1-n-a)_n &= (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-n-a)} \cdot \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(n+a)} \cdot \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)} \\
&= \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)} \cdot (-1)^n \cdot \Gamma(a)\Gamma(1-a) \cdot \frac{1}{\Gamma(n+a)\Gamma(1-(n+a))} \\
&= (a)_n \cdot (-1)^n \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \cdot \frac{\sin(\pi(n+a))}{\pi} \\
&= (a)_n \cdot (-1)^n \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \cdot \frac{(-1)^n \sin(\pi a)}{\pi} \\
&= (a)_n
\end{aligned}
$$

2 つ目も同様に，相反公式を用いれば，

$$
\begin{aligned}
(a)_{-n} &= \frac{\Gamma(a-n)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(1-a+n)}{\Gamma(1-a)} \cdot \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a+n)} \\
&= \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a+n)} \cdot \Gamma(a-n)\Gamma(1-(a-n)) \cdot \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \\
&= \frac{1}{(1-a)_n} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi(a-n))} \cdot \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \\
&= \frac{1}{(1-a)_n} \cdot \frac{\pi}{(-1)^n \sin(\pi a)} \cdot \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{(1-a)_n}
\end{aligned}
$$

□

命題 B.8.

$$
\begin{aligned}
(a)_{n+k} &= (a)_n (a+n)_k \\
(a)_{n-k} &= \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-n-a)_k} \\
(-n)_k &= \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

Proof. 1 つ目は，

$$
(a)_{n+k} = \frac{\Gamma(a+n+k)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+n+k)}{\Gamma(a+n)} = (a)_n (a+n)_k
$$

2 つ目は直前に示した式と (B.1) 式から，

$$
(a)_{n-k} = (a)_n (a+n)_{-k} = (a)_n \cdot \frac{(-1)^k}{(1-(a+n))_k} = \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-n-a)_k}
$$

3 つ目は (B.1) 式と，$\Gamma(m+1) = m!$ から，

$$
(-n)_k = \frac{(-1)^{-k}}{(1+n)_{-k}} = (-1)^k \cdot \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-k)} = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}
$$

□

系 B.9.

$$
(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n
$$

Proof.

$$
(a)_{n+1} = (a)_n (a+n)_1 = (a)_n \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a+n)} = (a)_n \frac{(a+n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a+n)} = (a+n)(a)_n
$$

□

命題 B.10.

$$
\binom{n}{k} = (-1)^k \frac{(-n)_k}{k!}
$$

Proof. (B.2) 式から，

$$
(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} \cdot \frac{k!}{k!} = (-1)^k k! \binom{n}{k}
$$

となるので，両辺に $(-1)^k / k!$ を掛けると，

$$
\binom{n}{k} = (-1)^k \frac{(-n)_k}{k!}
$$

□

命題 B.11.

$$
(a)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{a}{2}\right)_n \left(\frac{a+1}{2}\right)_n
$$

Proof. Gamma 関数に関する Legendre の倍角公式（定理 A.13）から得られる，

$$\Gamma(a) = \Gamma\left(2\cdot\frac{a}{2}\right) = \frac{2^{a-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

$$\Gamma(a+2n) = \Gamma\left(2\left(\frac{a}{2}+n\right)\right) = \frac{2^{a+2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}+n\right)$$

を用いることで，

$$\begin{aligned}(a)_{2n} &= \frac{\Gamma(a+2n+a)}{\Gamma(a+2n)} = \frac{\frac{2^{a+2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}+n\right)}{\frac{2^{a-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} \\ &= 2^{2n}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} = 2^{2n}\left(\frac{a}{2}\right)_n\left(\frac{a+1}{2}\right)_n\end{aligned}$$

□

命題 B.12.

$$\begin{aligned}(2n)! &= 2^{2n}(1)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n \\ \left(\frac{1}{2}\right)_n &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \qquad \text{(B.3)}\end{aligned}$$

Proof. Gamma 関数に関する Legendre の倍角公式（定理 A.13），$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$，$(1)_n = n!$ から，

$$\begin{aligned}(2n)! &= \Gamma(2n+1) = 2n\Gamma(2n) = 2n\cdot\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ &= 2^{2n}\cdot n\Gamma(n)\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^{2n}\cdot n!\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= 2^{2n}(1)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\end{aligned}$$

後者は今得られた式を書き換えて，

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(1)_n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

□

命題 B.13.

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad \text{(B.4)}$$

Proof. 最初の等号は，(B.3) 式に帰着させて，

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)_n$$

から成立。

次の等号を示す前に，二重階乗の定義を確認しておく。偶数の二重階乗は，

$$\begin{aligned}(2n)!! &:= 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots4\cdot2 \\ &= 2^n\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1 = 2^n n!\end{aligned}$$

で定義されており，奇数の二重階乗は，

$$\begin{aligned}(2n-1)!! &\coloneqq (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\\ &= \frac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 4\cdot 2}\\ &= \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\end{aligned}$$

である。

二重階乗を階乗で表した式を用いて最右辺を計算すると，

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2^n n!} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

となる。よって，

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

が成立する。 □

最後に示した (B.4) 式は，冪級数展開の係数に二重階乗を含むような関数[*16]を超幾何級数表示に直す際に用いる。

C 線型常微分方程式論

C.1 Lipschitz 条件と解の存在・一意性

この節では，常微分方程式を扱う上で最も基本的・かつ重要な，解の存在性と一意性についての命題を扱う。詳しくは [1, 高野] を参照。

実数 t を独立変数，実数 x_j を t の従属変数とする（但し，$1\le j\le n$）。縦ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}$ を，$\boldsymbol{x} \coloneqq {}^t(x_1,\dots,x_n)$，$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \coloneqq {}^t(f_1(t,\boldsymbol{x}),\dots,f_n(t,\boldsymbol{x}))$ で定める。

定義 C.1 (Lipschitz 条件)**.** $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ が，$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の有界領域：

$$E \coloneqq \left\{\ (t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^{n+1}\ \middle|\ |t-a|\le r,\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|\le\rho\ \right\}$$

において連続であるとする。このとき，$\boldsymbol{f}$ が Lipschitz 条件を満たすとは，

$$\exists L>0,\ \|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\|\le L\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,\qquad ((t,\boldsymbol{x}),(t,\boldsymbol{y})\in E)$$

が成立することである。但し，ここでのノルム $\|\cdot\|$ は，成分の絶対値のうち最大のもの，すなわち，

$$\|\boldsymbol{x}\| \coloneqq \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$$

で定義されているものとする。このときの L を Lipschitz 定数と呼ぶ。

高階の常微分方程式は，未知関数を増やすことにより連立 1 階常微分方程式に帰着させることができる。その微分方程式を，

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(t,x_1,\cdots,x_n),\qquad (1\le j\le n)$$

[*16] 完全楕円積分 $K(x)$，第二種完全楕円積分 $E(x)$，逆正弦関数 $\arcsin(x)$ など

と表すことにし，これをまとめて，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{C.1}$$

と表す。

例 C.2. 定数 m, k を含む $x = x(t)$ に関する以下の常微分方程式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

は，

$$p \coloneqq m\frac{dx}{dt}$$

という新たな未知関数 p を導入することにより，

$$\frac{dp}{dt} = -kx$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

のように連立 1 階常微分方程式に帰着される。これをベクトルを用いて記述すると，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx \\ \frac{p}{m} \end{pmatrix}$$

である。

特に，今回の方程式は線型かつ定数係数であるため，行列を用いて，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}$$

と表すことができる。右辺の行列を対角化することにより，容易に解くことができるようになる。

線型常微分方程式と Lipschitz 条件には重要な関係がある。

定理 C.3. $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ が $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の領域 D において連続かつ局所的に Lipschitz 条件を満たすとする。このとき，任意の $(a, \boldsymbol{b}) \in D$ に対して $(a, \boldsymbol{b})$ を通る (C.1) 式の解が $(a, \boldsymbol{b})$ の近傍でただひとつ存在する。

C.2 定数係数斉次二階常微分方程式

a, b を複素定数とする。未知関数 $w(z)$ に関する定数係数斉次 2 階常微分方程式：

$$w'' + aw' + bw = 0 \tag{C.2}$$

について考察する。指数関数型の解 $w(z) = e^{\lambda z}$ を仮定して λ に関する特性方程式：

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

を解くことによって独立な 2 解を得て，その線形結合により一般解を求めるのが最も基本的である。特性方程式が重解の場合は $e^{\lambda z}$, $ze^{\lambda z}$ が独立な 2 解になるのであった。

この節では，(C.2) 式の微分方程式を冪級数解法を用いて解く。冪級数解法では，より一般的な微分方程式を解くことができる。

複素係数 c_n を用いて，$z=0$ 周りの冪級数展開を

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

と表す。項別微分可能性や，和の順序交換ができることを認めると，

$$\begin{aligned} w''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}z^n, \\ w'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n \end{aligned}$$

となるから，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)c_{n+2}+a\cdot(n+1)c_{n+1}+b\cdot c_n\Big]z^n=0$$

これが任意の z について成り立つためには，全ての n に対して z^n の係数が 0 でなければならない。よって，c_n についての漸化式，

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+a\cdot(n+1)c_{n+1}+b\cdot c_n=0$$

を得る。$d_n \coloneqq n!c_n$ と置けば，

$$d_{n+2}+ad_{n+1}+bd_n=0$$

となる。

(i) 定数係数斉次三項間漸化式の特性方程式：

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

が重解を持たないとき

異なる 2 解を $\lambda_1,\,\lambda_2$ とすれば，

$$\begin{cases} d_{n+2}-\lambda_1 d_{n+1}=\lambda_2(d_{n+1}-\lambda_1 d_n) \\ d_{n+2}-\lambda_2 d_{n+1}=\lambda_1(d_{n+1}-\lambda_2 d_n) \end{cases}$$

これより，

$$\begin{cases} d_{n+1}-\lambda_1 d_n=\lambda_2^n(d_1-\lambda_1 d_0) \\ d_{n+1}-\lambda_2 d_n=\lambda_1^n(d_1-\lambda_2 d_0) \end{cases}$$

となり，

$$d_n=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[(\lambda_2^n-\lambda_1^n)d_1-\lambda_1\lambda_2\big(\lambda_2^{n-1}-\lambda_1^{n-1}\big)d_0\Big]$$

となる。また，特性方程式の解は，二次方程式の解の公式から，

$$\lambda_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\quad \lambda_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

であるから，

$$\lambda_2-\lambda_1=\sqrt{a^2-4b}$$

と表せる。更に，解と係数の関係から，$\lambda_1\lambda_2 = b$ であり，また，$c_n = d_n/n!$ であるから，$c_1 = d_1/1! = d_1$，$c_0 = d_0/0! = d_0$ より，

$$c_n = \frac{1}{n!\sqrt{a^2-4b}}\Big[(\lambda_2^n - \lambda_1^n)c_1 - b\big(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}\big)c_0\Big]$$

よって，解 $w(z)$ は，

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\sqrt{a^2-4b}}\Big[(\lambda_2^n - \lambda_1^n)c_1 - b\big(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}\big)c_0\Big]z^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-4b}}\left[c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^n z^n - \lambda_1^n z^n}{n!} - bc_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_2}\frac{\lambda_2^n z^n}{n!} - \frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n z^n}{n!}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-4b}}\left[\left(\frac{bc_0}{\lambda_1} - c_1\right)e^{\lambda_1 z} - \left(\frac{bc_0}{\lambda_2} - c_1\right)e^{\lambda_2 z}\right] \end{aligned}$$

また，解と係数の関係を再び使えば，

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2-4b}}\big[(\lambda_2 c_0 - c_1)e^{\lambda_1 z} - (\lambda_1 c_0 - c_1)e^{\lambda_2 z}\big]$$

を得る。但し，

$$\lambda_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

である。

(ii) 定数係数斉次三項間漸化式の特性方程式：

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

が重解を持つとき。

重解を λ_0 とすれば，

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2}a$$

である。

ここで，更に場合分けをする。

$a = b = 0$ のとき，重解は $\lambda_0 = 0$ であり，$w''(z) = 0$ であり，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}z^n = 0$$

$n = 0, 1, \ldots$ において $c_{n+2} = 0$ でなければならず，

$$w(z) = c_0 + c_1 z$$

となる。

このとき，

$$d_{n+2} - \lambda_0 d_{n+1} = \lambda_0(d_{n+1} - \lambda_0 d_n)$$

と書けるから，

$$d_{n+1} - \lambda_0 d_n = \lambda_0^n(d_1 - \lambda_0 d_0)$$

を得る。

$a \neq 0$ のとき，$\lambda_0 \neq 0$ であるから，この式を λ_0^{n+1} で割ることで，

$$\frac{d_{n+1}}{\lambda_0^{n+1}} - \frac{d_n}{\lambda_0^n} = \frac{d_1}{\lambda_0} - d_0$$

となる。これより，

$$d_n = d_0\lambda_0^n + n\lambda_0^n\left(\frac{d_1}{\lambda_0} - d_0\right)$$

となるので，

$$c_n = \frac{d_n}{n!} = \frac{d_0\lambda_0^n}{n!} + \frac{\lambda_0^{n-1}}{(n-1)!}(d_1 - \lambda_0 d_0) = \frac{c_0\lambda_0^n}{n!} + \frac{\lambda_0^{n-1}}{(n-1)!}(c_1 - \lambda_0 c_0)$$

であり，

$$\begin{aligned} w(z) &= c_0\sum_{n=0}\frac{\lambda_0^n}{n!}z^n + (c_1 - \lambda_0 c_0)z\sum_{n=1}\frac{\lambda_0^{n-1}z^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= c_0 e^{\lambda_0 z} + (c_1 - \lambda_0 c_0)ze^{\lambda_0 z} \end{aligned}$$

を得る。

まとめると，

$$w(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-4b}}\big[(\lambda_2 c_0 - c_1)e^{\lambda_1 z} - (\lambda_1 c_0 - c_1)e^{\lambda_2 z}\big] & \big(a^2 - 4b \neq 0\big) \\ c_0 e^{\lambda_0 z} + (c_1 - \lambda_0 c_0)ze^{\lambda_0 z} & \big(a^2 - 4b = 0\big) \end{cases}$$

が解である。但し，級数の置き方から $c_0 = w(0)$, $c_1 = w'(0)$ であって，

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-a - \sqrt{a^2-4b}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-a + \sqrt{a^2-4b}}{2} \\ \lambda_0 &= -\frac{1}{2}a \end{aligned}$$

である。

C.3 Euler の微分方程式

Euler の微分方程式と呼ばれる微分方程式を扱う。これは，確定特異点を持つ微分方程式のうち，最も単純なものである。

定数係数 $a, b \in \mathbb{C}$ を持つ $w(z)$ に関する Euler の微分方程式：

$$z^2 w'' + azw' + bw = 0 \tag{C.3}$$

の一般解を求める。

$t = \ln(z)$，すなわち，$z = e^t$ と置く。

$$\frac{d}{dz} = \frac{dt}{dz}\frac{d}{dt} = \frac{1}{z}\frac{d}{dt} = e^{-t}\frac{d}{dt}$$

となり，
$$\frac{d^2}{dz^2}=\left(e^{-t}\frac{d}{dt}\right)\left(e^{-t}\frac{d}{dt}\right)=e^{-t}\left(-e^{-t}\frac{d}{dt}+e^{-t}\frac{d^2}{dt^2}\right)=-e^{-2t}\frac{d}{dt}+e^{-2t}\frac{d^2}{dt^2}$$
である。$w(z)=w(e^t)=f(t)$ と置き直すと，(C.3) 式は，
$$e^{2t}\left(-e^{-2t}\frac{d}{dt}+e^{-2t}\frac{d^2}{dt^2}\right)f(t)+ae^t\cdot e^{-t}\frac{d}{dt}f(t)+bf(t)=0$$
となり，整理することで，
$$f''(t)+(a-1)f'(t)+bf(t)=0$$
となる。これは (C.2) 式において，$a\mapsto a-1$ としたものに対応している。従って，$(a-1)^2-4b\neq 0$ のときの解は，
$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{(a-1)^2-4b}}\left[(\lambda_2'c_0'-c_1')e^{\lambda_1't}-(\lambda_1'c_0'-c_1')e^{\lambda_2't}\right]$$
となる。$w(z)$ は，$t=\ln(z)$ を代入し直せば，
$$w(z)=f(\ln(z))=\frac{1}{\sqrt{(a-1)^2-4b}}\left[(\lambda_2'c_0'-c_1')z^{\lambda_1'}-(\lambda_1'c_0'-c_1')z^{\lambda_2'}\right]$$
となる。ここで，
$$w(z)=f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n't^n=\sum_{n=0}^{\infty}c'n(\ln(z))^n$$
であるから，
$$c_0'=w(1),\quad c_1'=w'(1)$$
となる。

$(a-1)^2-4b=0$ のときの解は，
$$f(t)=c_0'e^{\lambda_0't}+(c_1'-\lambda_0'c_0')te^{\lambda_0't}$$
であり，$t=\ln(z)$ を代入し直せば，$w(z)$ は，
$$w(z)=c_0'z^{\lambda_0'}+(c_1'-\lambda_0'c_0')z^{\lambda_0'}\ln(z)$$
と求まる。こちらも，
$$c_0'=w(1),\quad c_1'=w'(1)$$
である。

これらのことから，元の微分方程式の解は，
$$w(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{(a-1)^2-4b}}\left[(\lambda_2'c_0'-c_1')z^{\lambda_1'}-(\lambda_1'c_0'-c_1')z^{\lambda_2'}\right], & \left((a-1)^2-4b\neq 0\right)\\ c_0'z^{\lambda_0'}+(c_1'-\lambda_0'c_0')z^{\lambda_0'}\ln(z), & \left((a-1)^2-4b=0\right)\end{cases}$$
である。但し，$c_0'=w(1), c_1'=w'(1)$ であり，
$$\lambda_1'=\frac{-a+1-\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2},\quad \lambda_2'=\frac{-a+1+\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2},\quad \lambda_0'=\frac{1}{2}(1-a)$$
である。

ここで注目すべきなのは，特性指数 λ が重解を持つとき，基本解 $e^{\lambda_0'z}$ に $\ln(z)$ を乗じた $e^{\lambda_0'z}\ln(z)$ という解が存在していることである。このことは，Frobenius の解法によって一般化される。

C.4 定数係数斉次常微分方程式

C.2 節では定数係数の二階常微分方程式を扱った。ここではそれを更に一般化した定数係数の常微分方程式について考える。

n を正整数，数列 $\{a_j\}_{0\le j\le n}$ は複素数列であるとする。但し，$a_n \neq 0$ とする[*17]。X に関する n 次の多項式 $L(X)$ を，

$$L(X) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

で定める。このとき，実変数の関数 $w(t)$ に関する常微分方程式：

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)w(t) = 0 \tag{C.4}$$

について考察する。微分方程式を明示的に書き下せば，

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} w(t) = 0,$$

あるいは，

$$\sum_{k=0}^{n} a_k w^{(k)}(t) = 0$$

である。但し，$w^{(k)}(t)$ は $w(t)$ の k 次導関数のことである。(C.4) 式を満たす線型独立な解を n 個見つけられれば一般解を構成できる。

初期条件は，複素数列 $\{b_k\}_{0\le j\le n-1}$ を用いて

$$w^{(k)}(0) = b_k,\ (0 \le k \le n-1) \tag{C.5}$$

とする。一般に，$t=0$ ではなく $t=t_0$ における条件であったとしても，後述するように少々手を加えれば同様の議論が成り立つ。

ここで，X に関する特性方程式：

$$L(X) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0$$

は，代数学の基本定理により，複素数の範囲に重解の重複度も込めて丁度 n 個の解が存在するので，それを λ_k とする $(0 \le k \le n-1)$。このとき，$L(\lambda_k) = 0$ である $(0 \le k \le n-1)$。

(i) $L(X) = 0$ が重解を持たない場合

$L\big(\frac{d}{dt}\big)$ を $e^{\lambda t}$ に作用させてみると，

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}$$

[*17] 常微分方程式の最高次の係数が消えないための条件

であるから，各 k に対して $w_k(t) \coloneqq e^{\lambda_k t}$ と定めると，

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)w_k(t) = L(\lambda_k)w_k(t) = 0 \cdot w_k(t) = 0$$

となるので，$w_k(t) = e^{\lambda_k t}$ は (C.4) 式の解である。仮定により，λ_k は全て相異なるので，$\{w_k(t)\}_k$ は線型独立である。これより，(C.4) 式の一般解は，任意複素定数列 $\{c_j\}_{0\leq j\leq n-1}$ を用いて，

$$w(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j w_j(t) \tag{C.6}$$

と表せる。

次に，(C.6) 式の一般解が (C.5) 式の初期条件を満たすように定数 c_j を決定する。各 j に対して，${w_j}^{(k)}(t) = \lambda_j^k w_j(t)$ であるから，

$$w^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j^k c_j {w_j}^{(k)}(t)$$

であり，${w_j}^{(k)}(0) = \lambda_j^k$ となることから，初期条件を満たすための方程式は，

$$w^{(k)}(0) = b_k = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j^k c_j$$

である。これをベクトル表示に直すために，$\boldsymbol{b} \coloneqq {}^t(b_0, \ldots, b_{n-1})$, $\boldsymbol{c} \coloneqq {}^t(c_0, \ldots, c_{n-1})$ と定め，(j, k) 成分が $\Lambda_{jk} = \lambda_j^k$ であるような行列 Λ を定義しておくと，

$$\Lambda\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$$

と書ける。ここで，Λ を具体的に書き下すと，

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

となり，これは Vandermonde 行列として知られているものである。仮定により，λ_k は相異なるので，

$$\det(\Lambda) = \prod_{0\leq j<k<n} (\lambda_k - \lambda_k) \neq 0$$

である。これより Λ には逆行列 Λ^{-1} が存在するから，$\boldsymbol{c} = \Lambda^{-1}\boldsymbol{b}$ となり，任意定数 c_j は初期条件 (C.5) 式によって一意的に決定される。

以上のことから，$L(X) = 0$ が重解を持たないなら，(C.4) 式の解全体は n 次線型空間をなし，その基底は $L(\lambda) = 0$ の解 λ_k を用いて $\left\{e^{\lambda_k t}\right\}_{0\leq k\leq n-1}$ と表せる。

(ii) $L(X) = 0$ が重解を持つ場合

上のように，単に $e^{\lambda_k t}$ を n 個並べただけでは重複度の分だけ基底が潰れてしまうから，一般解を構成することができない。そこで，以下の補題を援用する：

補題 C.4 (因数定理)**.** 多項式 $L(X)$ が $X = \lambda_k$ を m 重解に持つことと以下が成立することは同値である：

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Big[0 \leq k \leq m-1 \implies L^{(k)}(\lambda_k) = 0\Big].$$

まずは λ_k が $L(\lambda) = 0$ の二重解である場合について考えると，上の補題で $m = 2$ に相当するので，$L(\lambda_k) = L^{(1)}(\lambda_k) = 0$ である。このことを用いて，λ もパラメータと見て，

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t} \tag{C.7}$$

の両辺を λ で偏微分してみよう。$e^{\lambda t}$ は λ, t に関して C^∞ 級であるから，偏微分の順序は自由に行えるので，(C.7) 式の左辺の λ 微分は，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{\lambda t} = L\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda t} = L\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(te^{\lambda t})$$

と計算できる。

(C.7) 式の右辺の λ 微分は，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\big[L(\lambda)e^{\lambda t}\big] = L^{(1)}(\lambda)e^{\lambda t} + L(\lambda)te^{\lambda t}$$

となる。得られた両辺に $\lambda = \lambda_k$ を代入すると，

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(te^{\lambda_k t}) = L^{(1)}(\lambda_k)e^{\lambda_k t} + L(\lambda_k)te^{\lambda_k t} = 0\cdot e^{\lambda_k t} + 0\cdot te^{\lambda_k t} = 0$$

となるので，λ_k が $L(\lambda) = 0$ の二重解である場合は，$te^{\lambda_k t}$ も (C.4) 式の解である[*18]。

同様にして，補題を用いることで λ_k が $L(\lambda) = 0$ の m 重解である場合，$e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda_k t}$ は (C.4) 式の解であることが分かる[*19]。

D　Poisson 和公式

Poisson 和公式は，元の関数の整数点における値の無限和と，Fourier 変換した後の関数の整数点における値の無限和を結びつける公式で，様々な関数等式を導くことのできる大変強力な公式である。また，Poisson 和公式から導かれる Theta 変換公式は楕円関数論や数論においても重要な役割を果たすが，ここではその詳細については立ち入らず，証明の紹介だけする。

本章では，正弦関数の無限積表示 (定理 D.7) の証明を目標にする。

D.1　Fourier 変換と Poisson 和公式

定義 D.1 (Fourier 変換)**.** 関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\tilde{f}(\xi)$ を，

$$\tilde{f}(\xi) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ f(x)e^{-2\pi i\xi x}$$

で定義する。但し，収束性のために $f(x)$ は以下の 2 条件を満たすとする：

*18 λ_k が二重解でない場合，$L^{(1)}(\lambda_k) \neq 0$ であるから $te^{\lambda_k t}$ は (C.4) 式の解にはならないことに注意。

*19 得られた解の線型独立性と初期条件を満たす c_j の一意性（解空間の基底であることの必要十分条件）は追記予定。

(i) $\exists\delta>0,\ f(x)=\mathcal{O}\Big(|x|^{-\delta-1}\Big)\ (x\to\pm\infty)$

(ii) $\exists\varepsilon>0,\ \tilde{f}(\xi)=\mathcal{O}\Big(|\xi|^{-\varepsilon-1}\Big)\ (\xi\to\pm\infty)$

定理 D.2 (Poisson 和公式)**.** Fourier 変換可能な関数 f について，以下が成立する：

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)e^{-2n\pi ix}$$

これを，（一般化された）Poisson 和公式と呼ぶ。

Proof. 関数 g を以下のように定める：

$$g(x)\coloneqq\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m)$$

このとき，任意の x について $g(x+1)=g(x)$ が成立するから，関数 g は周期 1 の周期関数であるから，複素 Fourier 級数展開：

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2n\pi ix}$$

を持つ。係数 c_n は，

$$c_n=\int_0^1 dx\ g(x)e^{-2\pi inx}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 dx\ f(x+m)e^{-2\pi inx}$$

である。各 m について，$x+m\mapsto x'$ とすると，区間は $[0,1]\mapsto[m,m+1]$ となり，複素指数関数の周期性から，$e^{-2\pi i(x'-m)}=e^{-2\pi inx'}$ である。m について和を取ると，

$$\begin{aligned}
c_n&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 dx\ f(x+m)e^{-2\pi inx}\\
&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_m^{m+1} dx'\ f(x')e^{-2\pi inx'}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)e^{-2\pi inx}\\
&=\tilde{f}(n)
\end{aligned}$$

となる。これより，

$$g(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)e^{-2\pi inx}$$

を得る。 □

系 D.3 (Poisson 和公式)**.** Poisson 和公式において，$x=0$ とすれば，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)$$

となる。この式を Poisson 和公式と呼ぶことが多い。

D.2　coth, cosech の級数展開

例 D.4 (coth(πx) の無限級数展開)**.** $f(x) := e^{-2\pi a|x|}$ として，Poisson 和公式を適用する。f の Fourier 変換は，

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-2\pi a|x|} e^{2\pi i\xi x} \\ &= \int_{-\infty}^{0} dx\ e^{2\pi(a-i\xi)x} + \int_{0}^{\infty} dx\ e^{-2\pi(a+i\xi)x} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi}\right) \\ &= \frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{\xi^2+a^2}\end{aligned}$$

となる。Poisson 和公式の左辺は，

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) &= \sum_{m=-\infty}^{-1} e^{2\pi am} + 1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi am} \\ &= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\pi am} = 1 + \frac{2e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} \\ &= \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} = \coth(\pi a)\end{aligned}$$

となるから，右辺と比較して，

$$\coth(\pi a) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{m^2+a^2}$$

を得る。あるいは，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{a^2}$$

と書き直すこともできる。

例 D.5 (cosech(πa) の無限級数展開)**.** 例 D.4 と同じく $f(x) = e^{-2\pi a|x|}$ として，一般化された Poisson 和公式で $x = \frac{1}{2}$ とすることで，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a}\mathrm{cosech}(\pi a)$$

を得ることもできる。

系 D.6. 以下が成立する：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\mathrm{cosech}(\pi n) = \frac{\pi^3}{360}$$

Proof. 例 D.5 で述べた cosech(πn) に関する和公式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+m^2} = \frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2m}\mathrm{cosech}(\pi m)$$

の両辺を $(-1)^{m-1}m^2$ で割って，$m=1,2,\ldots$ で足し合わせると，左辺は，

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+m^2}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^2+n^2}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{m-1}}{m^2}-\frac{(-1)^{m-1}}{m^2+n^2}\right)\\
&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right)^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{\pi}{2n}\mathrm{cosech}(\pi n)\right)\\
&=\left(\frac{\pi^2}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\mathrm{cosech}(\pi n)\\
&=\frac{\pi^4}{144}-\frac{7\pi^4}{1440}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\mathrm{cosech}(\pi n)\\
&=\frac{3\pi^4}{1440}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\mathrm{cosech}(\pi n)
\end{aligned}$$

となり，右辺は，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^4}-\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\mathrm{cosech}(\pi n)\\
&=\frac{7\pi^4}{1440}-\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\mathrm{cosech}(\pi n)
\end{aligned}$$

となる。但し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$$

を用いた。これらは，Riemann zeta 関数 $\zeta(z)$ を用いて一般に，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^z}=\left(1-2^{-z}\right)\zeta(z)$$

と書けて，命題 F.11 から

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$$

であることを用いると導かれる。

これより，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\mathrm{cosech}(\pi n)=\frac{\pi^3}{360}$$

を得る。 □

D.3　正弦関数の無限積表示

定理 D.7 (正弦関数の無限積展開)**.**

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Proof. coth の展開公式 D.4 で，$\coth(ix) = -i\cot(x)$ を用いることで，

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

を得る。両辺微分して符号を入れ替えると，

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right)$$

を得る。ここで，

$$f(x) \coloneqq \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

と定めて両辺の対数微分を取ると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \pi\cot(\pi x)$$

が分かる。両辺積分すると，

$$f(x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \sin(\pi x)$$

が従う[*20]。よって，

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

である。 □

D.4　Theta 変換公式

定理 D.8 (Theta 変換公式)**.** α, t を正の実数とするとき，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi t(n+\alpha)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(2\pi i n\alpha - \frac{n^2\pi}{t}\right)$$

が成立する。

[*20] 積分定数を決める必要があるが，例えば $x = \frac{1}{2}$ における値として Wallis の公式：$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ を用いればよい。

Proof. $f(x) \coloneqq \exp\bigl(-\pi t(x+\alpha)^2\bigr)$ に対して Poisson 和公式を適用する。f の Fourier 変換：

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\pi t(x+\alpha)^2} e^{2\pi i \xi x}$$

を求める。被積分関数の指数を平方完成すると，

$$\begin{aligned}
-\pi t(x+\alpha)^2 - 2\pi i \xi x &= -\pi t\left\{x^2 + 2\left(\alpha + \frac{i\xi}{t}\right)x + \alpha^2\right\} \\
&= -\pi t\left(x + \alpha + \frac{i\xi}{t}\right) - \pi\left(\frac{\xi^2}{t} - 2i\alpha\xi\right)
\end{aligned}$$

となるので，Gauss 積分（命題 A.7）に帰着させて，

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\xi) &= \exp\left(2\pi i\alpha\xi - \frac{\pi\xi^2}{t}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp\left(-\pi t\left(x + \alpha + \frac{i\xi}{t}\right)^2\right) \\
&= \exp\left(2\pi i\alpha\xi - \frac{\pi\xi^2}{t}\right)\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(2\pi i\alpha\xi - \frac{\pi\xi^2}{t}\right)
\end{aligned}$$

となる。Poisson 和公式から，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi t(n+\alpha)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(2\pi i n\alpha - \frac{n^2\pi}{t}\right)$$

である。 □

系 D.9 (Theta 関数)**.** Theta 関数 $\vartheta(x)$ を，

$$\vartheta(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \tag{D.1}$$

で定めると，

$$1 + 2\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}(1 + 2\vartheta(x))$$

が成立する。

Proof. Theta 変換公式を Theta 関数で書き直せば得られる。 □

Theta 関数は楕円関数と関係があり，数論でも重要な役割を果たす。詳しくは [6, 小山] を参照。

E　多重対数関数の公式

定義 E.1 (Dirichlet 級数)**.** 複素数列 $\{c_n\}_n$ と複素数 s を用いて，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$$

で表される級数を Dirichlet 級数という。

定義 E.2 (多重対数関数)**.** s, z を複素数とする。多重対数関数 $\mathrm{Li}_s(z)$ は以下で定義される：

$$\mathrm{Li}_s(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

但し，収束性のため $|z| < 1$ とする。多重対数関数 $\mathrm{Li}_s(z)$ は Dirichlet 級数において $c_n = z^n$ と選んだものである。

例 E.3 (Riemann zeta 関数)**.** $\mathrm{Li}_s(z)$ において $z = 1$ とすると，

$$\mathrm{Li}_s(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

となる。

F　Riemann zeta 関数

F.1　無限級数表示

定義 F.1 (Riemann zeta 関数（級数表示）)**.** $\mathrm{Re}(z) > 1$ であるような複素数 z に対し，Riemann zeta 関数 $\zeta(z)$ を以下のように定める：

$$\zeta(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{F.1}$$

命題 F.2 (絶対収束域)**.** (F.1) 式の級数は $\mathrm{Re}(z) > 1$ でのみ絶対収束し，$\mathrm{Re}(z) \leq 1$ では発散する。

Proof. $z = \sigma + i\omega$ とする（σ, ω は実数）と，$n^z = e^{z \ln(n)}$ より，$|n^z| = \left|e^{z \ln(n)}\right| = \left|e^{\sigma \ln(n)}\right|\left|e^{i\omega \ln(n)}\right| = n^\sigma$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\sigma$ の収束性を調べればよい。

n が正整数のとき，$a < b$ なら $1/n^b \leq 1/n^a$ であるから，$\mathrm{Re}(z) = \sigma \leq 1$ で発散することを示すには，$\mathrm{Re}(z) = \sigma = 1$ で発散することを示せば十分である。

$\sigma > 0$ を用いて $f(x) \coloneqq 1/x^\sigma$ と定めると，$x > 0$ で $f(x)$ は下に凸な狭義単調減少関数であるから，区間 $[n, n+1]$ で面積比較することで，

$$\frac{1}{(n+1)^\sigma} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n^\sigma}$$

が得られる。これを辺々 $n = 1$ から N まで足し合わせると，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^\sigma} < \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\sigma} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma}$$

から，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} - 1 + \frac{1}{(N+1)^\sigma} < \int_1^{N+1} \frac{dx}{x^\sigma} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma}$$

が得られる。これを $\sum_{n=1}^{N} 1/n^\sigma$ について解き直すと，

$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{x^\sigma} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} < \int_1^{N+1} \frac{dx}{x^\sigma} + 1 - \frac{1}{(N+1)^\sigma}$$

となる。ここで，

$$\int_1^{N+1}\frac{dx}{x^\sigma}=\begin{cases}\left[\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right]_1^{N+1} & =\frac{1}{\sigma-1}\left\{1-\frac{1}{(N+1)^{\sigma-1}}\right\} \quad (\sigma\neq 1)\\ \Big[\ln(x)\Big]_1^{N+1} & =\ln(N+1) \quad (\sigma=1)\end{cases}$$

であるから，$\sigma>1$ のとき，

$$\frac{1}{\sigma-1}\left\{1-\frac{1}{(N+1)^{\sigma-1}}\right\}<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\sigma}<\frac{\sigma}{\sigma-1}-\frac{1}{(\sigma-1)(N+1)^{\sigma-1}}-\frac{1}{(N+1)^\sigma}$$

が成立する。よって，$N\to\infty$ の極限で，

$$\frac{1}{\sigma-1}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<\frac{\sigma}{\sigma-1}$$

であるから確かに絶対収束している。また，$\sigma=1$ のとき，

$$\ln(N+1)<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

であるが，左辺は $N\to\infty$ で発散するから，$\sigma<1$ では絶対収束しない。 □

F.2 無限積表示

定義 F.3 (無限積の収束)**.** 複素数列 $\{c_n\}_n$ の無限積 $\prod_{n=1}^\infty c_n$ が収束するとは，

$$P_N:=\prod_{n=1}^{N}c_n$$

が $N\to\infty$ において0でない有限の値に収束することとする。無限積 $\prod_{n=1}^\infty(1+c_n)$ が絶対収束するとは，$\prod_{n=1}^\infty(1+|c_n|)$ が収束することとする。

注意 F.4. 有限積の極限が 0 に収束することを無限積の収束に含めないのは，$\{c_n\}_n$ の中に 1 つでも 0 があるとそれ以外での振る舞いの情報が全て失われて 0 になってしまうからでもあり，P_N の対数を取って，

$$\ln(P_N)=\sum_{n=1}^{N}\ln(c_n)$$

とすると，$P_N\to 0$ のとき，無限和 $\ln(P_\infty)$ が $-\infty$ が発散するにも関わらず P_N は 0 に収束することになってしまうからである。$P_N\to 0$ を無限積の収束の定義から外しておくことで，無限積（P_N の極限）が収束することと，無限和（$\ln(P_N)$ の極限）が収束することが一対一に対応するようになる。

定理 F.5 (無限和と無限積の絶対収束)**.** $\sum_{n=1}^\infty c_n$ が絶対収束するなら，$\prod_{n=1}^\infty(1+c_n)$ は絶対収束する。

Proof. $\sum_{n=1}^\infty c_n$ が絶対収束すると仮定し，$\prod_{n=1}^\infty(1+c_n)$ の絶対収束性を示す。

まず，$\{c_n\}_n$ の無限和が絶対収束するとき，$\prod_{n=1}^\infty(1+|c_n|)$ は有限値になることを示す。その後，その有限値が 0 でないことを示せばよい。

$P_N \coloneqq \prod_{n=1}^{N}(1+c_n)$ とすると，$P_{N+1} = (1+c_{N+1})P_N$ であるから，

$$P_{N+1} - P_N = c_{N+1}P_N$$

である。仮定から，

$$S \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty}|c_n| < \infty$$

であって，三角不等式及び，指数関数の Maclaurin 展開から得られる 1 次近似の不等式から，

$$|1+c_N| \leq 1+|c_N| \leq e^{|c_N|}$$

であるから，任意の N について，

$$|P_N| = \prod_{n=1}^{N}|1+c_n| \leq \prod_{n=1}^{N}e^{|c_n|} = \exp\left(\sum_{n=1}^{N}|c_n|\right) \leq \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\right) = e^S$$

が成立する。

$P_{N+1} - P_N = c_{N+1}P_N$ において各辺和を取ると，

$$P_{N+1} - P_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(P_{n+1} - P_n) = \sum_{n=1}^{\infty}c_{n+1}P_n \leq \sum_{n=1}^{\infty}|c_{n+1}P_n| \leq e^S\sum_{n=1}^{\infty}|c_{n+1}| = e^S(S-|c_1|) < \infty$$

となり，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{n+1}P_n| \leq e^S(S-|c_1|) < \infty$$

より，上に有界な単調列であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(P_{n+1} - P_n) = \sum_{n=1}^{\infty}c_{n+1}P_n$$

は絶対収束する。絶対収束する級数は収束するから，左辺は収束する。

これより，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(P_{n+1} - P_n) = \lim_{N\to\infty}(P_{N+1} - P_1)$$

が収束するので，

$$P_\infty \coloneqq \lim_{N\to\infty}P_N$$

は存在する。これにより,，$\{c_n\}_n$ の無限和が絶対収束するとき，$P_\infty = \prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ は有限値になることが示された。

次に，$P_\infty \neq 0$ を示す。そのために，

$$Q_N \coloneqq \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+c_n}$$

と定め，Q_N の収束性が示されれば，$P_NQ_N = 1$ であるから，P_∞ が 0 でないことが示せる。

まず，

$$a_n \coloneqq \frac{c_n}{1+c_n}$$

と定めると，

$$1 - a_n = \frac{1}{1 + c_n}$$

である。$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が絶対収束するという仮定から，$c_n \to 0$ $(n \to \infty)$ でなければならない。このことから，十分大きな n に対して $|c_n + 1| > \frac{1}{2}$ が成立する。これより，

$$\frac{1}{|c_n + 1|} < 2$$

であるから，各辺に $|c_n| \geq 0$ を掛けて，

$$|a_n| = \left| \frac{c_n}{c_n + 1} \right| \leq 2|c_n|$$

である。各辺の無限和を考えると，$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ より，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も絶対収束する。

上で，数列の無限和が絶対収束するとき，その無限積は有限の値に収束することを示したので，

$$Q_\infty \coloneqq \prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + c_n}$$

も有限の値に収束する。a_n の定め方から，$P_N Q_N = 1$ であり，極限の存在から $P_\infty Q_\infty = 1$ であるから $P_\infty \neq 0$ である。

これより，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が絶対収束するとき，$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$ は絶対収束する。すなわち，$\prod_{n=1}^{N} (1 + |c_n|)$ は $N \to \infty$ において収束し，かつその極限値は 0 ではない。 □

定理 F.6 ($\zeta(z)$ の Euler 積表示)**.** 以下では $0 \notin \mathbb{N}$ とする。$\mathbb{P}$ を素数全体の集合とする。(F.1) 式は $\mathrm{Re}(z) > 1$ において次の Euler 積表示を持つ：

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Proof. $\mathrm{Re}(z) > 1$ とする。

$$P_N \coloneqq \prod_{p \leq N,\, p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}} \tag{F.2}$$

と定める。

$$|\zeta(z) - P_N| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

が示せればよい。

(F.2) 式において，$0 < |p^{-z}| < 1$ であるから無限等比級数の式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r} \quad (|r| < 1)$$

が適用できて，S_N を N 以下の素因数のみを持つ自然数全体の集合としたとき，

$$P_N = \prod_{p \leq N,\, p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^{-mz} \right) = \sum_{n \in S_N} \frac{1}{n^z}$$

と書ける。ここで，素因数分解の一意性を用いた。

集合の包含を考えると，$\mathbb{N}_{\le N} \subseteq S_N \subseteq \mathbb{N}$ であるから，S_N を除くと，$\mathbb{N} \setminus S_N \subseteq \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\le N} = \mathbb{N}_{>N}$ である。これにより，

$$|\zeta(z) - P_N| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \sum_{n \in S_N} \frac{1}{n^z} \right| = \left| \sum_{n \notin S_N} \frac{1}{n^z} \right| \le \left| \sum_{n > N} \frac{1}{n^z} \right| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

である。よって，

$$\lim_{N \to \infty} P_N = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}} = \zeta(z)$$

が成立する。 □

定理 F.7 (Riemann zeta 関数の非零領域)**.** $\zeta(z)$ は $\mathrm{Re}(z) > 1$ において零点を持たない。

Proof. 定義 F.3 から，無限積が収束することは，有限積が 0 でない値に収束することであるから，$\zeta(z)$ の無限積表示が（0 でない値に）収束することを示せばよい。

$\mathrm{Re}(z) > 1$ において，無限等比級数の公式から，

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{mz}} \right)$$

が成立する。

定理 F.5 を用いることで，

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{mz}} \right| < \infty$$

を示せばよいことが分かる。

三角不等式により，

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{mz}} \right| \le \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{1}{p^{mz}} \right|$$

である。ここで，$\{p^m \mid p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{N}\}$ は素数の冪乗で表される自然数しか含まれていないから，命題 F.2 によって，

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{1}{p^{mz}} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| < \infty$$

である。

無限和 $\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} p^{-mz}$ の絶対収束を示したので，定理 F.5 により，無限積の絶対収束及び無限積の収束が示された。従って $\zeta(z)$ は $\mathrm{Re}(z) > 1$ において零点を持たない。 □

F.3 偶数における特殊値

定義 F.8 (Bernoulli 数)**.** Bernoulli 数 B_n の母関数を次のように与える：

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \tag{F.3}$$

例 F.9. 具体的に数項計算してみると，

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30}$$

などが得られる。

Bernoulli 数を具体的に得る場合に (F.3) 式の左辺を直接 Maclaurin 展開するのはあまり得策とは言えない。実用的には漸化式や明示公式が存在するので，それらを用いて計算するのがよい [3, 小松]。

（後に詳細を加筆予定であるが，）ここでは事実を引用するに留めておく：

命題 F.10.

- 漸化式：

$$B_0 = 1,\ B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n+1}{m}B_m$$

- 明示公式：

$$B_n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m m^n \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{k}{m}$$

- 奇数番目の Bernoulli 数は B_1 を除き全て 0 であり，偶数番目は正負が交互に入れ替わる。
- 漸化式や明示公式から分かるように，Bernoulli 数は有理数である。

定理 F.11 (正の偶数点 $z = 2n$ における $\zeta(z)$ の特殊値)**.** n を正の整数とするとき，以下が成立する：

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}$$

Proof. 定理 D.7 の $\sin(x)$ の無限積展開：

$$\sin(x) = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

で $x = \frac{u}{2i}$ とすると，左辺は Euler の公式から，

$$\sin\left(\frac{u}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\cdot\frac{u}{2i}} - e^{-i\cdot\frac{u}{2i}}\right) = \frac{e^{\frac{u}{2}}(1 - e^{-u})}{2i}$$

となり，右辺は，

$$\frac{u}{2i}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\frac{u}{2i}\right)^2\right\} = \frac{u}{2i}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2\pi^2 + u^2}{4n^2\pi^2}$$

であるから，

$$\frac{e^{\frac{u}{2}}(1 - e^{-u})}{2i} = \frac{u}{2i}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2\pi^2 + u^2}{4n^2\pi^2}$$

が成立する。両辺の対数微分を取ると，

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u}{4n^2\pi^2 + u^2}$$

となる。両辺に u を掛け，Bernoulli 数の母関数の定義を適用して $B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2}$ を使えば，

$$\sum_{k=1}\frac{B_n}{n!}u^n = 2u^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2\pi^2 + u^2}$$

となる。右辺に無限等比級数の公式を使えば，

$$2u^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2\pi^2+u^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u}{2n\pi}\right)^2\frac{1}{1+\left(\frac{u}{2n\pi}\right)^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u}{2n\pi}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{u}{2n\pi}\right)^{2k}$$

となる。和の順序を入れ替えると，

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u}{2n\pi}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{u}{2n\pi}\right)^{2k}=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u}{2n\pi}\right)^{2k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}u^{2k}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$$

となる。Riemann zeta 関数の定義を適用すれば，

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}u^{2k}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}u^{2k}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}u^n=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}u^{2k}$$

である。$k\geq 1$ に対して u^{2k} の係数を比較することで，

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!}=2\frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)$$

が得られるので，n を正整数とするとき，確かに

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}$$

が成立する。 □

例 F.12 (Riemann zeta 関数の偶数点における特殊値の例)**.** 命題 F.10 と定理 F.11 から分かるように，$\zeta(2n)=$(有理数)$\cdot\pi^{2n}$ の形をしていることが分かる。実際，具体的に定理 F.11 を用いていくつか計算してみると，

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\ \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},\ \zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{93555},$$
$$\zeta(12)=\frac{691}{638512875}\pi^{12},\ \zeta(14)=\frac{2}{18243225}\pi^{14},\ \zeta(16)=\frac{3617}{325641566250}\pi^{16},\ \zeta(18)=\frac{43867}{38979295480125}\pi^{18}$$

のようになる。ここで，$\zeta(12)$ の分子に現れた 691 は素数であり，これ以外にも数論において様々な場面で登場する不思議な数である[*21]。因みに，$\zeta(16)$, $\zeta(18)$ の分子に登場した 3617, 43867 も素数である。

F.4 解析接続

定理 F.13 (Riemann zeta 関数の第一積分)**.** $\mathrm{Re}(z)>1$ に対して Riemann zeta 関数 $\zeta(z)$ は以下の積分表示を持つ：

$$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\infty}dx\ \frac{x^{z-1}}{e^x-1}$$

[*21] 詳しくは tsujimotter のノートブック：「691 に心惹かれる理由」(`https://tsujimotter.hatenablog.com/entry/691`)

Proof. 定理 A.6 から，$\mathrm{Re}(z) > 0$ であるような複素数 z について，

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\ t^{z-1} e^{-t}$$

が成立するので，正整数 n に対して $t = nx$ とすると，$dt = ndx$ であって，

$$n^{-z}\Gamma(z) = n^{-z}\int_0^\infty n\,dx\ e^{-nx}(nx)^{z-1} = \int_0^\infty dx\ e^{-nx}x^{z-1}$$

である。両辺 n について和を取ると，左辺は，

$$\Gamma(z)\sum_{n=1}^\infty n^{-z} = \Gamma(z)\zeta(z)$$

となり，右辺は積分と無限和の順序交換をすれば，

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dx\ e^{-nx}x^{z-1} = \int_0^\infty dx\ x^{z-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} = \int_0^\infty dx\ x^{z-1}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \int_0^\infty dx\ \frac{x^{z-1}}{e^x - 1}$$

である。よって，$\mathrm{Re}(z) > 1$ のとき，

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty dx\ \frac{x^{z-1}}{e^x-1}$$

である。 □

定理 F.14 (Riemann zeta 関数の第二積分)**.** $\vartheta(z)$ を (D.1) で定義された Theta 関数：

$$\vartheta z = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 z}$$

とすると，以下が成立する：

$$\zeta(z) = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}\int_0^\infty dx\ \vartheta(x)x^{\frac{z}{2}-1}$$

Proof. 定理 A.6 から，$\mathrm{Re}(z) > 0$ であるような複素数 z について，

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \int_0^\infty dt\ t^{\frac{z}{2}-1}e^{-t}$$

が成立するので，正整数 n に対して $t = \pi n^2 x$ とすると，$dt = \pi n^2 dx$ であって，

$$n^{-z}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = n^{-z}\int_0^\infty \pi n^2\,dx\ e^{-\pi n^2 x}\left(\pi n^2 x\right)^{\frac{z}{2}-1} = \pi^{\frac{z}{2}}\int_0^\infty dx\ e^{-\pi n^2 x}x^{\frac{z}{2}-1}$$

となる。両辺 n について和を取り，無限和と積分の順序交換をすれば，

$$\zeta(z)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \pi^{\frac{z}{2}}\int_0^\infty x^{-\frac{z}{2}-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} = \pi^{\frac{z}{2}}\int_0^\infty \vartheta(x)x^{-\frac{z}{2}-1}$$

であるから

$$\zeta(z) = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}\int_0^\infty dx\ \vartheta(x)x^{\frac{z}{2}-1}$$

が成立する。 □

定義 F.15 (完備 Riemann zeta 関数)**.** 完備 Riemann zeta 関数を，

$$\hat{\zeta}(z) \coloneqq \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{F.4}$$

と定義する。

定理 F.16 (完備 Riemann zeta 関数の関数等式)**.**

$$\hat{\zeta}(z) = \hat{\zeta}(1-z) \tag{F.5}$$

が成立する。

Proof. 定理 F.14 から，

$$\hat{\zeta}(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \int_0^\infty dx\ \vartheta(x)x^{\frac{z}{2}-1}$$

である。積分区間を分割して，

$$\hat{\zeta}(z) = \int_0^1 dx\ \vartheta(x)x^{\frac{z}{2}-1} + \int_1^\infty dx\ \vartheta(x)x^{\frac{z}{2}-1}$$

としておき，右辺第 1 項の積分で $x \mapsto x^{-1}$ と置換すると，

$$\int_0^1 dx\ \vartheta(x)x^{\frac{z}{2}-1} = \int_1^\infty dx\ \vartheta\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{z}{2}-1}$$

である。

ここで，系 D.9 の Theta 変換公式から，

$$\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left\{x^{\frac{1}{2}}(2\vartheta(x)+1)-1\right\}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\int_1^\infty dx\ \vartheta\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{z}{2}-1} &= \int_1^\infty dx\ \frac{1}{2}\left\{x^{\frac{1}{2}}(2\vartheta(x)+1)-1\right\}x^{-\frac{z}{2}-1} \\ &= \int_1^\infty dx\ \vartheta(x)x^{\frac{1-z}{2}-1} + \frac{1}{2}\int_1^\infty dx\ x^{-\frac{z}{2}-1}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\end{aligned}$$

となる。ここで，$\mathrm{Re}(z) > 1$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_1^\infty dx\ x^{-\frac{z}{2}-1}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\ \left(x^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{z}{2}-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^{-\frac{z}{2}+\frac{1}{2}}}{-}\frac{x^{-\frac{z}{2}}}{-\frac{z}{2}}\right]_1^\infty \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\frac{z}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{z}{2}}\right) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{z(1-z)}\end{aligned}$$

が得られるので，

$$\hat{\zeta}(z) = \int_1^\infty \frac{dx}{x}\ \vartheta(x)\left(x^{\frac{z}{2}} + x^{\frac{1-z}{2}}\right) - \frac{1}{z(1-z)}$$

となるが，これは $z \mapsto 1-z$ の変換に関して不変であるから確かに

$$\hat{\zeta}(z) = \hat{\zeta}(1-z)$$

である。 $\square$

定理 F.17 (Riemann zeta 関数の関数等式)**.** 以下が成立する：

$$\zeta(1-z) = \frac{2\Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(2\pi)^z}\zeta(z)$$

Proof. 完備 Riemann zeta 関数 $\hat{\zeta}(z)$ の定義 (F.4) 式を用いて完備 Riemann zeta 関数の関数等式 (F.5) 式を Riemann zeta 関数 $\zeta(z)$ で書き直すと，

$$\zeta(1-z) = \pi^{\frac{1}{2}-z}\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}\zeta(z)$$

である。右辺の分母分子に $\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$ を掛け，Gamma 関数の相反公式（定理 A.4）と倍角公式（定理 A.13）を適用すると，

$$\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} = 2^{1-z}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(z)\cdot\frac{\sin\left(\pi\left(\frac{z+1}{2}\right)\right)}{\pi} = \pi^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2\Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2^z}$$

であるから，

$$\zeta(1-z) = \pi^{\frac{1}{2}-z}\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}\zeta(z) = \pi^{\frac{1}{2}-z}\cdot\pi^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2\Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2^z}\cdot\zeta(z) = \frac{2\Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(2\pi)^z}\zeta(z)$$

が成立する。 $\square$

G　Hilbert 空間と Hermite 関数系の完全性

G.1　線型空間

定義 G.1 (線型空間)**.** V が $\mathbb{C}$ 上の線型空間であるとは，以下の条件を全て満たすことである。

(1) 以下の性質を満たす和 $+ : V\times V\to V;\ (x,y)\mapsto x+y$ が定義されている：
- (i)（結合則）$\forall x, \forall y, \forall z\in V,\ (x+y)+z = x+(y+z)$
- (ii)（交換則）$\forall x, \forall y\in V,\ x+y=y+x$
- (iii)（零元の存在）$\exists o\in V;\ \forall x\in V,\ o+x=x$
- (iv)（逆元の存在）$\forall x\in V, \exists y\in V;\ y+x=o$

(2) 以下の性質を満たすスカラー倍 $\cdot : \mathbb{C}\times V;\ (k,x)\mapsto kx$ が定義されている：
- (v)（第一分配則）$\forall k, \forall \ell\in\mathbb{C},\ \forall x\in V,\ (k+\ell)x = kx+\ell x$
- (vi)（第二分配則）$\forall k\in\mathbb{C},\ \forall x, \forall y\in V,\ k(x+y)=kx+ky$
- (vii)（スカラー倍の結合則）$\forall k, \forall \ell\in\mathbb{C},\ \forall x\in V,\ (k\ell)x = k(\ell x)$
- (viii)（スカラー倍の単位元）$\forall x\in V,\ 1x=x$

上の条件を満たす V の元 o を零元や零ベクトルと呼び，$x+y=o$ を満たす y を x の逆元と呼ぶ。

注意 G.2. 線型空間のことをベクトル空間と呼ぶこともある。スカラー倍を考える集合を $\mathbb{C}$ から体 K に取り替えれば，V は K 上の線型空間と呼ばれる。尚，本来は集合 V，体 K，和 $+$，スカラー倍 $\cdot$ の組 $(V, K, +, \cdot)$ を線型空間と呼ぶべきであるが，考えている体や和，スカラー倍の定義が明らかである場合には単に V を線型空間と呼ぶ。また，線型空間 V の元を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のように太字で表すこともあるが，線型空間の元であることが明らかな場合は太字にしないことも多い。

以下，V を $\mathbb{C}$ 上の線型空間とする。

命題 G.3. V の任意の元は 0 倍すると零元 o になる。すなわち：

$$\forall x \in V,\ 0x = o.$$

Proof. x の逆元の一つを y とすると，零元の性質，スカラー倍の単位元の性質，分配則から，

$$o = y + x = y + 1x = y + (1+0)x = y + (1x + 0x) = (y + 1x) + 0x = (y + x) + 0x = o + 0x = 0x$$

となるので確かに成立している。 □

以降，V の零元も単に 0 と記すことにするが，一般には複素数の 0 とは異なるので注意。

命題 G.4 (零元・逆元の一意性)**.** 線型空間 V の零元と逆元は一意的である。

Proof. 零元の一意性から示す。V の元 $0, 0'$ が共に零元の性質を持つとすると，

$$0 = 0' + 0 = 0 + 0' = 0'$$

となるから零元は一意的である。

次に，V の元 x に対し，V の元 y, z が共に逆元の性質を持つとすると，

$$y = 0 + y = (z + x) + y = z + (x + y) = z + (y + x) = z + 0 = 0 + z = z$$

となるから逆元は一意的である。 □

x の逆元は一意的であるから，以下ではそれを $-x$ と記すことにする。

命題 G.5. 任意の V の元に対し，それを -1 倍したものは逆元となる：

$$\forall x \in V,\ (-1)x + x = 0.$$

Proof.

$$(-1)x + x = ((-1) + 1)x = 0x = 0$$

□

G.2 ノルム空間と内積空間

以降でも，V を $\mathbb{C}$ 上の線型空間とする。

定義 G.6 (ノルム)**.** 関数 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R};\ x \mapsto \|x\|$ が以下の条件を満たすとき，$\|x\|$ を x のノルムと呼ぶ：

(i)（正値性）$\forall x \in V,\ \|x\| \geq 0$

(ii)（一意性）$\forall x \in V,\ \Big[\|x\| = 0 \iff x = 0\Big]$
(iii)（同次性）$\forall k \in \mathbb{C},\ \forall x \in V,\ \|kx\| = |k|\|x\|$
(iv)（三角不等式）$\forall x, \forall y \in V,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

命題 G.7 (三角不等式)**.** ノルムは次の性質も満たす：

$$\forall x, \forall y \in V,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Proof.

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

から

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

が従い，

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|(-1)(x - y)\| + \|x\| = |-1|\|x - y\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|$$

から

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

である。ここで，絶対値の特徴付け：

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

を用いると，

$$|\|x\| - \|y\|| = \max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} \leq \|x - y\|$$

より，

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

が成立する。 □

系 G.8. 命題 G.7 において，$y \mapsto -y$ として，元の三角不等式と併せれば，

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

が従う。

系 G.9 (ノルムの連続性)**.** ノルムは連続関数である。

Proof. 示すべきことは以下の通り：

$$\forall x, \forall y \in V,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \Big[\varepsilon > 0 \implies \Big(\exists \delta \in \mathbb{R},\ \Big[\delta > 0 \land (\|x - y\| < \delta \implies |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon)\Big]\Big)\Big].$$

実際，$\delta = \varepsilon$ と取れば，命題 G.7 により，

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon$$

である。よってノルムは連続関数である。 □

定義 G.10 (Hermite 内積)**.** 複素数値関数 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C};\ (x, y) \mapsto \langle x \,|\, y \rangle$ が V 上の Hermite 内積であるとは，以下の条件を満たすことである：

(i)（線型性）$\forall k, \forall \ell \in \mathbb{C},\ \forall x, \forall y, \forall z \in V,\ \langle x \mid ky + \ell z \rangle = k\langle x \mid y \rangle + \ell \langle x \mid z \rangle$

(ii)（共役対称性）$\forall x, \forall y \in V,\ \langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle^*$

(iii)（正値正）$\forall x \in V,\ \langle x \mid x \rangle \geq 0$

(iv)（一意性）$\forall x \in V,\ \Big[\langle x \mid x \rangle = 0 \iff x = 0\Big]$

注意 G.11. 上では第二引数についての線型性を要請したが，数学系の本では第一引数に関する線型性：

$$\forall k, \forall \ell \in \mathbb{C},\ \forall x, \forall y, \forall z \in V,\ \langle kx + \ell y \mid z \rangle = k\langle x \mid z \rangle + \ell \langle y \mid z \rangle$$

が課されていることも多いので注意。ここでは物理系の本でよく見られる定義（第二引数に関する線型性）を採用した。

G.3 Hilbert 空間の定義

以下では [5, 野村] を参考に，Hilbert 空間の完全性に関する命題について述べ，最後に Hermite 関数系の完全性について述べる。

定義 G.12 (Hilbert 空間)**.** X は複素線型空間であって，任意の $x, y \in X$ に対して Hermite 内積 $\langle x \mid y \rangle$ が定義されているものとする。更に，ノルム $\|x\| := \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ によって X をノルム空間とするとき，X は完備，すなわち絶対収束する任意の級数が収束するものとする。このような X を **Hilbert 空間**という。

以下，X を Hilbert 空間とし，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の正規直交系とする。すなわち，

$$\forall m, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle u_m \mid u_n \rangle = \delta_{mn}$$

を満たすものとする。

補題 G.13 (Bessel の不等式)**.** 任意の $x \in X$ に対し，

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} |\langle u_n \mid x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \tag{G.1}$$

が成立する。特に，正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_n \mid x \rangle|^2$ は収束する。

Proof. Hermite 内積の正値性：

$$\forall x \in X,\ 0 \leq \langle x \mid x \rangle = \|x\|^2$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle u_n \mid x \rangle u_n \right\|^2 \\
&= \left\langle x - \sum_{m=1}^{N} \langle u_m \mid x \rangle u_m \,\middle|\, x - \sum_{n=0}^{N} \langle u_n \mid x \rangle u_n \right\rangle \\
&= \langle x \mid x \rangle - \sum_{n=0}^{N} \langle u_n \mid x \rangle \langle x \mid u_n \rangle - \sum_{m=1}^{N} \langle u_m \mid x \rangle^* \langle u_m \mid x \rangle + \sum_{m,n=0}^{N} \langle u_m \mid x \rangle^* \langle u_n \mid x \rangle \langle u_m \mid u_n \rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \langle u_n \mid x \rangle \langle u_n \mid x \rangle^* - \sum_{m=1}^{N} |\langle u_m \mid x \rangle|^2 + \sum_{m,n=0}^{N} \langle u_m \mid x \rangle^* \langle u_n \mid x \rangle \delta_{mn}
\end{aligned}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle u_n \,|\, x\rangle|^2$$

となる。よって確かに (G.1) 式が成立する。

特に，(G.1) 式の左辺は $\|x\|^2$ で抑えられる上に有界な単調増加実数列だから，$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}|\langle u_n \,|\, x\rangle|^2$ は収束する。 □

G.4 直交関数系の完全性

引き続き，X を Hilbert 空間とし，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の正規直交系とする。

命題 G.14 (完全性と同値な命題)**.** 以下の (i)-(iii) は同値である。

(i)（一意性）

$$\forall x \in X,\ \left[\forall n \in \mathbb{N},\ \langle u_n \,|\, x\rangle = 0 \implies x = 0\right]$$

(ii)（完全性）[22]

$$\forall x \in X,\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n \,|\, x\rangle u_n$$

(iii)（Parseval の等式）

$$\forall x \in X,\ \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_n \,|\, x\rangle|^2$$

Proof. (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i) の順で示す。

- (i)⇒(ii)
  $\sum_{n=0}^{N}\langle u_n \,|\, x\rangle u_n$ が Cauchy 列であることを示す。任意の自然数 M, N に対し，$M < N$ のとき，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の正規直交性から，

$$\left\|\sum_{n=0}^{N}\langle u_n \,|\, x\rangle u_n - \sum_{n=0}^{M}\langle u_n \,|\, x\rangle u_n\right\|^2 = \left\|\sum_{n=M+1}^{N}\langle u_n \,|\, x\rangle u_n\right\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N}|\langle u_n \,|\, x\rangle|^2 \tag{G.2}$$

  が成立する。補題 G.13 から，$M \to \infty$ で (G.2) の右辺 $\to 0$ となる。よって，(G.2) の左辺 $\to 0$ となり，Cauchy 列である。X の完備性から級数 $\sum_{n=0}^{N}\langle u_n \,|\, x\rangle u_n$ は $N \to \infty$ のときノルム収束する。

$$y \coloneqq x - \sum_{n=0}^{\infty}\langle u_n \,|\, x\rangle u_n$$

  とおけば，

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \langle u_n \,|\, y\rangle = \langle u_n \,|\, x\rangle - \langle u_n \,|\, x\rangle = 0$$

  が従うが，(i) を仮定しているから $y = 0$ となる。よって，$x = \sum_{n=0}^{\infty}\langle u_n \,|\, x\rangle u_n$ である。

[22] 右辺はノルム収束する無限級数

- (ii)⇒(iii)
  補題 G.13 の式変形と (ii) の仮定を用いて，
  $$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle u_n \,|\, x \rangle u_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle u_n \,|\, x \rangle|^2 \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty)$$
  が言えるから，確かに
  $$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_n \,|\, x \rangle|^2$$
  が従う。
- (iii)⇒(i)
  一般に，任意の自然数 n に対して，$|\langle u_n \,|\, x \rangle|^2 \geq 0$ であるが，(i) の条件：任意の自然数 n に対して $\langle u_n \,|\, x \rangle = 0$，の下では，
  $$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_n \,|\, x \rangle|^2 = \|x\|^2$$
  となり，$\|x\| = 0$ が言える。Hermite 内積の定義から，$\|x\| = 0$ が成立するのは $x = 0$ に限るので，確かに $x = 0$ である。

以上にて，(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i) が言えたので，確かに (i)-(iii) は同値である。 □

与えられた作用素に対する固有関数系が完全性 (ii) を持つかどうかは，一意性 (i) が成立するかどうかを調べると楽な場合が多い。この章の最後に，後述する Fourier 変換の一意性と併せることで Hermite 関数系の完全性を証明する。

定義 G.15 (Lebesgue 空間)**.** $1 \leq p < \infty$ とする。
$$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\middle|\; \left(\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \; |f(x)|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$
と定め，これを $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度 $d\mu = d^n x$ に対する Lebesgue 空間という。[*23]

定義 G.16 (n 次元 Fourier 変換)**.** $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し，$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を，
$$\tilde{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \; f(x) e^{-i\langle \xi \,|\, x \rangle} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$
と定め，$\tilde{f}$ を f の Fourier 変換と呼ぶ。

補題 G.17 (n 次元 Fourier 変換の一意性)**.** $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ かつ $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ なら，
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \xi \; \tilde{f}(\xi) e^{i\langle \xi \,|\, x \rangle} \quad (\text{a.e.}\, x \in \mathbb{R}^n)$$
が成立し，特に $\tilde{f} \equiv 0$ なら $f \equiv 0$ (a.e. $x \in \mathbb{R}^n$) である。

Proof. 略。（[5, 野村] 附章 E, 定理 E.2.4） □

[*23] 一般的な Lebesgue 空間よりも形が制限されている。後に Hermite 多項式 $H_n(t)$ に $e^{-t^2/2}\left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-1/2}$ を掛けることで Hermite 関数系の内積を考えるが，測度 $d\mu$ を取り替えれば Hermite 多項式の内積として考えることもできる。

G.5 Hermite 関数系

定義 G.18 (Hermite 多項式)**.** Hermite 多項式 $H_n(t)$ は，

$$H_n(t) \coloneqq (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}, \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{G.3}$$

によって定義される多項式である。

補足 G.19. $H_n(t)$ は実係数 n 次多項式である。また，最高次 t^n の係数は 2^n である。

補足 G.20. 任意の自然数 n について，n 次以下の多項式のなす線型空間として，

$$\mathrm{Span}\{1, t, \ldots, t^n\} = \mathrm{Span}\{H_0, H_1 \ldots, H_n\}$$

である。

Proof. 補足 G.19 を用い，線型空間としての次元と t の次数（線型空間としての基底）を見れば分かる。 □

命題 G.21 (Hermite 多項式の母関数)**.** $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ とすると，

$$e^{-z^2+2zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} z^n \tag{G.4}$$

が成立する。

Proof. $f(z) \coloneqq e^{-z^2}$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数であるから，原点周りの Taylor 展開：

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

が成立する。実数 t に対し，$f_t(z) \coloneqq f(z-t)$ と定め，これを冪級数表示すると，$f(z)$ が偶関数であることより $f_t^{(n)}(0) = f^{(n)}(-t) = (-1)^n f^{(n)}(t)$ であることに注意して，

$$e^{-(z-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_t^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f^{(n)}(t)}{n!} z^n$$

となる。Hermite 多項式の定義 (G.3) 式から，$f^{(n)}(t) = (-1)^n e^{-t^2} H_n(t)$ であり，これを代入すると，

$$e^{-(z-t)^2} = e^{-z^2+2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n e^{-t^2} H_n(t)}{n!} z^n = e^{-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} z^n$$

となり，両辺 e^{-t^2} で割れば確かに (G.4) 式が成立する。 □

G.6 Hermite 関数系の直交性

命題 G.22. Hermite 多項式系 $\{H_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ について，

$$\forall m, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt\ H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \tag{G.5}$$

が成立する。

Proof. 命題 G.21 で確かめた母関数表示を利用し，以下の積分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-z^2+2zt} \cdot e^{-w^2+2wt} \cdot e^{-t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} z^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(t)}{k!} w^k \right) e^{-t^2}$$

をそれぞれ計算し，z, w の係数比較を行う。

左辺の被積分関数の指数を $-z^2 + 2zt - w^2 + 2wt - t^2 = (t - z - w)^2 + 2zw$ と書き換えておけば，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-z^2+2zt} \cdot e^{-w^2+2wt} \cdot e^{-t^2} &= e^{2zw} \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-(t-z-w)^2} \\ &= e^{2zw} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n w^n}{n!} \end{aligned}$$

となる。特に，z と w の次数が等しいものしか残らないことが分かる。

次に右辺の積分を計算すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(t)}{m!} z^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} w^n \right) e^{-t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^m w^n}{m! n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt\ H_m(t) H_n(t) e^{-t^2}$$

となるが，$m = n$ の項しか残らないので，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n w^n}{n!} \cdot \frac{1}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt\ H_n(t)^2 e^{-t^2}$$

となるので，$z^m w^n$ の係数比較をすることで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ H_n(t)^2 e^{-t^2} = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

を得る。上で述べたように，$z^m w^n$ について，$m \neq n$ の係数は残らないので，

$$\forall m, \forall n \in \mathbb{N},\ \left[m \neq n \implies \int_{-\infty}^{\infty} dt\ H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} = 0 \right]$$

が従う。これらをまとめて表せば (G.5) 式が成立する。 □

G.7 Hermite 関数系の完全性

定義 G.23 (Hermite 関数)**.** 非負整数 n に対して

$$\phi_n(t) \coloneqq \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-t^2/2} H_n(t)$$

と定める。各 ϕ_n を Hermite 関数と呼ぶ。

命題 G.24. Hermite 関数系 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交系である。

Proof. 命題 G.22 から従う。 □

定理 G.25 (Hermite 関数系の完全性)**.** Hermite 関数系 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は完全性を満たす。すなわち $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をなす。

Proof. 命題 G.14 の (i) を示す。任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ が，

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \langle \phi_n \,|\, f \rangle = 0$$

を満たすと仮定する。この仮定の下で $f = 0$ が言えれば命題 G.14 から $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が完全系であることが言える。

まずは仮定を具体的に書き下す。

$$0 = \langle \phi_n \,|\, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \frac{e^{-t^2/2} H_n(t)}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} f(t) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) e^{-t^2/2} H_n(t)$$

となるので，仮定は

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) e^{-t^2/2} H_n(t) = 0 \tag{G.6}$$

と等価である。

次に，ξ の関数として，

$$F(\xi) \coloneqq e^{\xi^2/4} \mathcal{F}\Big[f(t) e^{-t^2/2}\Big] = e^{\xi^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t) e^{-t^2/2} e^{-i\xi t}$$

を定める。

これを変形し，命題 G.21 の Hermite 多項式の母関数を用いると，

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t) e^{-t^2/2} \exp\left(\frac{1}{4}\xi^2 - i\xi t\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t) e^{-t^2/2} \exp\left(-\left(-\frac{1}{2} i\xi\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2} i\xi\right) t\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t) e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} \left(-\frac{1}{2} i\xi\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2} i\xi\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t) e^{-t^2/2} H_n(t)\right] \\
&= 0 \qquad (\because \text{(G.6)})
\end{aligned}$$

が従う。これより，

$$F(\xi) = e^{\xi^2/4} \mathcal{F}\Big[f(t) e^{-t^2/2}\Big] = 0$$

なので，$\mathcal{F}\Big[f(t) e^{-t^2/2}\Big] = 0$ である。補題 G.17 から，$f(t) e^{-t^2/2} = 0$ (a.e. $t \in \mathbb{R}$) であって，$e^{-t^2/2}$ で払うことで $f = 0$ (a.e.) が従う。

よって，Hermite 関数系は完全性を満たし，$L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底である。 □

補足 G.26 (Hermite 関数の Fourier 変換)**.** Hermite 関数系 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \phi_n(t) e^{-i\xi t} = (-i)^n \phi_n(\xi)$$

を満たす。特に，Hermite 関数系は Fourier 変換作用素に対する固有値 $(-1)^n$ の固有関数である。また，$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底であるから，Fourier 変換作用素は，$L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素に拡張できる。この性質は Fourier 変換に関する Parseval の等式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \left|\tilde{f}(\xi)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |f(x)|^2$$

に現れている。

補足 G.27 (Hermite 関数の満たす微分方程式)**.** n を非負整数とするとき，各 n に対応する Hermite 関数 ϕ_n は，微分作用素 $-\frac{d^2}{dt^2}+t^2$ に対する固有値 $2n+1$ の固有関数である。すなわち，

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2}+t^2\right)\phi_n(t)=(2n+1)\phi_n(t)$$

が成立する。特に，$(\hat{A}+\hat{B})^\dagger=\hat{A}^\dagger+\hat{B}^\dagger$, $(\hat{A}\hat{B})^\dagger=\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$ 及び，$\left(\frac{d}{dt}\right)^\dagger=-\frac{d}{dt}$ が成立することから，微分作用素 $-\frac{d^2}{dt^2}+t^2$ は Hermite 作用素である。これは Hermite 関数系が直交関数系をなすことに対応している。

H　Euler 作用素

定義 H.1 (一般化された Euler 作用素)**.** 自然数 n に対し，一般化された Euler 作用素 ϑ_n を

$$\vartheta_n \coloneqq x^n\partial^n \tag{H.1}$$

と定義する。但し，$\partial^n \coloneqq \frac{d^n}{dx^n}$, $\frac{d^0}{dx^0}=1$ である。これは，十分滑らかな関数 f に対し，

$$f\mapsto \vartheta_n f=x^n\frac{d^n f}{dx^n}$$

のように作用するものとする。また，ϑ_n の累乗 ϑ_n^k を，

$$\vartheta_n^k \coloneqq \begin{cases} 1, & (k=0)\\ \vartheta_n\vartheta_n^{k-1}, & (k\geq 1)\end{cases}$$

によって定める。

(3.8) 式の Euler 作用素 ϑ は，(H.1) 式の ϑ_n を用いると $\vartheta=\vartheta_1$ と書ける。また，ϑ_n は線形作用素であり，任意の定数 a, b に対して

$$\vartheta_n(af+bg)=a\vartheta_n f+b\vartheta_n g$$

が成立する。

命題 H.2. m, n を自然数としたとき，以下が成立する：

$$\vartheta_m\vartheta_n=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{m-k}(m-k)!\vartheta_{n+k}.$$

Proof. 微分に関する Leibniz 則：

$$\partial^n(fg)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\partial^k f\right)\left(\partial^{n-k}g\right)$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\vartheta_m\vartheta_n &= x^m\partial^m(x^n\partial^n) = x^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\partial^{m-k}x^n\right)\left(\partial^k\partial^n\right)\\ &= x^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{n!}{(n-m+k)!}x^{n-m+k}\partial^{n+k}\\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{n!}{(n-m+k)!(m-k)!}\cdot(m-k)!x^{n+k}\partial^{n+k}\\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{m-k}(m-k)!\vartheta_{n+k}\end{aligned}$$

であるから確かに成立している。 □

系 H.3. $m=1$ とすると，

$$\vartheta_1\vartheta_n = n\vartheta_n + \vartheta_{n+1}$$

である。

Proof. 命題 H.2 の結果を用いて，

$$\begin{aligned}\vartheta_1\vartheta_n &= \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}\binom{n}{1-k}(1-k)!\vartheta_{n+k} = \binom{1}{0}\binom{n}{1}1!\vartheta_n + \binom{1}{1}\binom{n}{0}0!\vartheta_{n+1}\\ &= n\vartheta_n + \vartheta_{n+1}\end{aligned}$$

であるから確かに成立する。 □

命題 H.4. n を正整数としたとき，ϑ_1^n は $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ の正整数係数の線形結合によって一意的に表せる。特に，

$$\vartheta_1^n = \sum_{m=1}^{n} a_n^{(m)}\vartheta_m$$

と書いたとき，正整数係数 $a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(m)}$ は以下の漸化式：

$$\begin{cases} a_{n+1}^{(m)} = ma_n^{(m)} + a_n^{(m-1)}, & (2 \le m \le n)\\ a_n^{(1)} = a_n^{(n)} = 1,\ a_1^{(k)} = 0, & (2 \le k)\end{cases} \tag{H.2}$$

を満たす。

Proof. 数学的帰納法によって示す。$n=1$ については定義から，

$$\vartheta_1^1 = \vartheta_1\vartheta_1^0 = \vartheta_1\cdot 1 = \vartheta_1$$

であり，右辺は ϑ_1 の正整数係数の線形結合であり，一意的であるから成立。次に，ある正整数 n について，正整数係数 $a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(m)}$ が一意的に存在して，

$$\vartheta_1^n = \sum_{m=1}^{n} a_n^{(m)}\vartheta_m$$

と表せたとすると，ϑ_1 の線型性と系 H.3 の結果から，

$$\begin{aligned}\vartheta_1^{n+1} &= \vartheta_1\vartheta_1^n = \vartheta_1\sum_{m=1}^{n} a_n^{(m)}\vartheta_m = \sum_{m=1}^{n} a_n^{(m)}\vartheta_1\vartheta_m \\ &= \sum_{m=1}^{n} a_n^{(m)}(m\vartheta_m + \vartheta_{m+1}) \\ &= a_n^{(1)}\vartheta_1 + \sum_{m=2}^{n}\left(ma_n^{(m)} + a_n^{(m-1)}\right)\vartheta_m + a_n^{(n)}\vartheta_{n+1} \end{aligned} \tag{H.3}$$

となる。最後の表式から，ϑ_1^{n+1} は $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n, \vartheta_{n+1}$ の線形結合で表されており，一意的である。数学的帰納法により，n を正整数としたとき，ϑ_1^n は $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ の正整数係数の線形結合によって一意的に表せることが示された。但し，一意性は $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ の線型独立性が成立する関数空間に作用させる場合に限る。

(H.3) 式と $\vartheta_1^{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1} a_{n+1}^{(m)}\vartheta_m$ を比較すると，

$$a_{n+1}^{(1)} = a_n^{(1)},\ a_{n+1}^{(m)} = ma_n^{(m)} + a_n^{(m-1)}\vartheta_m,\ (2 \le m \le n),\ a_{n+1}^{(n+1)} = a_n^{(n)}$$

が成立していることが判る。特に，$\vartheta_1^1 = 1\cdot\vartheta_1$ であることから $a_1^{(1)} = 1$ であるから，$a_{n+1}^{(1)} = a_n^{(1)} = \cdots = a_2^{(1)} = a_1^{(1)} = 1$ であり，$a_{n+1}^{(n+1)} = a_n^{(n)} = \cdots = a_2^{(2)} = a_1^{(1)} = 1$ であるから，確かに，

$$\begin{cases} a_{n+1}^{(m)} = ma_n^{(m)} + a_n^{(m-1)}, & (2 \le m \le n) \\ a_n^{(1)} = a_n^{(n)} = 1,\ a_1^{(k)} = 0, & (2 \le k) \end{cases}$$

が成立する。 □

例 H.5. $m = 2, 3$ の場合に具体的に漸化式を解いて $a_n^{(2)}, a_n^{(3)}$ を決定する。

$m = 2$ のとき，

$$a_1^{(2)} = 0,\ a_{n+1}^{(2)} = 2a_n^{(2)} + a_n^{(1)} = 2a_n^{(2)} + 1$$

であり，これを解くと，

$$a_n^{(2)} = 2^{n-1} - 1$$

となる。

次に，$m = 3$ のとき，

$$a_1^{(3)} = 0,\ a_{n+1}^{(3)} = 3a_n^{(3)} + a_n^{(2)} = 3a_n^{(3)} + 2^{n-1} - 1$$

であり，

$$a_{n+1}^{(3)} + 2^n - \frac{1}{2} = 3\left(a_n^{(3)} + 2^{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

と変形できるから，

$$a_n^{(3)} = \frac{1}{2} - 2^{n-1} + \frac{3^{n-1}}{2}$$

と表せる。

特に，

$$\begin{aligned} a_n^{(2)} &= -1 + \frac{1}{2}\cdot 2^n, \\ a_n^{(3)} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 2^n + \frac{1}{6}\cdot 3^n \end{aligned}$$

と表せる。

定理 H.6. (H.2) 式の解は，

$$a_n^{(m)} = \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^n, \quad (1 \le m \le n)$$

である。

Proof. $a_n^{(1)} = a_n^{(n)} = 1$ は既に判っているので，

$$\begin{cases} a_{n+1}^{(m)} = ma_n^{(m)} + a_n^{(m-1)}, & (2 \le m \le n), \\ a_1^{(k)} = 0, & (2 \le k \le m) \end{cases}$$

を解けばよい。例 H.5 の結果から，解は

$$a_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} k^n c_k^{(m)} \tag{H.4}$$

のような形をしていることが予想される。これを仮定して漸化式に代入すると，

$$\begin{aligned} 0 &= ma_n^{(m)} + a_n^{(m-1)} - a_{n+1}^{(m)} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} k^n \Big\{(m-k)c_k^{(m)} + c_k^{(m-1)}\Big\} \end{aligned}$$

であるから，関係式：

$$c_k^{(m)} = -\frac{c_k^{(m-1)}}{m-k}, \quad (1 \le k \le m-1)$$

を満たしていれば漸化式を満たす。これを変形していくと，

$$c_k^{(m)} = -\frac{c_k^{(m-1)}}{m-k} = \frac{-1}{m-k}\cdot\frac{-1}{m-1-k}c_k^{(m-2)} = \cdots = \frac{(-1)^{m-k}c_k^{(k)}}{(m-k)!}, \quad (1 \le k \le m-1) \tag{H.5}$$

が得られる。この条件からは $c_m^{(m)}$ が決定されないが，$a_1^{(m)} = 0$ を使えば決定できて，

$$0 = a_1^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} k^1 c_k^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1} k\cdot\frac{(-1)^{m-k}c_k^{(k)}}{(m-k)!} + mc_m^{(m)}$$

であるから，

$$c_m^{(m)} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}kc_k^{(k)}}{(m-k)!} \tag{H.6}$$

と判る。

$1 = a_1^{(1)} = \sum_{k=1}^{1} k^1 c_k^{(1)} = c_1^{(1)}$ であるから $c_1^{(1)} = 1$ であり，(H.6) 式によって $c_k^{(k)}$ が決定され，(H.5) 式を用いることで任意の $a_n^{(m)}$ が計算できる。

具体的に数項計算してみると，$c_1^{(1)} = 1$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
c_2^{(2)} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{2-1}\cdot 1}{(2-1)!}c_1^{(1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}, \\
c_3^{(3)} &= -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{(-1)^{3-1}\cdot 1}{(3-1)!}c_1^{(1)} + \frac{(-1)^{3-2}\cdot 2}{(3-2)!}c_2^{(2)}\right) = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}, \\
c_4^{(4)} &= -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{(-1)^{4-1}\cdot 1}{(4-1)!}c_1^{(1)} + \frac{(-1)^{4-2}\cdot 2}{(4-2)!}c_2^{(2)} + \frac{(-1)^{4-3}\cdot 3}{(4-3)!}c_3^{(3)}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}, \\
c_5^{(5)} &= -\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{c_1^{(1)}}{(5-1)!} - \frac{2c_2^{(2)}}{(5-2)!} + \frac{3c_3^{(3)}}{(5-3)!} - \frac{4c_4^{(4)}}{(5-4)!}\right) \\
&= -\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{24} - \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}, \\
c_6^{(6)} &= -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{5!}c_1^{(1)} + \frac{2}{4!}c_2^{(2)} - \frac{3}{3!}c_3^{(3)} + \frac{4}{2!}c_4^{(4)} - \frac{5}{1!}c_5^{(5)}\right) = \frac{1}{720} = \frac{1}{6!}.
\end{aligned}
$$

これらのことから，一般に $c_m^{(m)} = \frac{1}{m!}$ だと予想できる。実際，数学的帰納法によって，$c_1^{(1)} = 1 = \frac{1}{1!}$ は成立しているので，$(m-1)$ 以下での正整数での成立を仮定すると，

$$
\begin{aligned}
c_m^{(m)} &= -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^{k-1}k}{(m-k)!}c_k^{(k)}, \quad (\ell \coloneqq m-k) \\
&= -\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m-1}\frac{(-1)^{\ell}(m-\ell)}{\ell!}c_{m-\ell}^{(m-\ell)}, \quad \left(c_{m-\ell}^{(m-\ell)} = \frac{1}{(m-\ell)!}\right) \\
&= -\frac{1}{m!}\sum_{\ell=1}^{m-1}\frac{(-1)^{\ell}(m-1)!}{\ell!(m-\ell-1)!} \\
&= -\frac{1}{m!}\left(-1 + \sum_{\ell=0}^{m-1}\binom{m-1}{\ell}(-1)^{\ell}\right) \\
&= -\frac{1}{m!}\left\{-1 + (1-1)^{m-1}\right\} \\
&= \frac{1}{m!}
\end{aligned}
$$

となるから，任意の正整数 m に対して

$$
c_m^{(m)} = \frac{1}{m!} \tag{H.7}
$$

が成立する。

これで $a_n^{(m)}$ を明示的に表すための準備は全て整った。(H.4) 式に (H.5) 及び，(H.7) 式を代入すれば，

$2 \leq m \leq n-1$ において，

$$
\begin{aligned}
a_n^{(m)} &= \sum_{k=1}^{m} k^n c_k^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1} k^n c_k^{(m)} + m^n c_m^{(m)} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^n (-1)^{m-k} c_k^{(k)}}{(m-k)!} + \frac{m^n}{m!} \\
&= \frac{1}{m!} \left(m^n + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^n \right) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^n
\end{aligned}
\tag{H.8}
$$

が従う。また，(H.8) の表式は，$a_n^{(1)} = a_n^{(n)} = 1$ も再現するので，結局 $1 \leq m \leq n$ の全てで成り立つ。 □

このことから直ちに以下が従う：

定理 H.7. Euler 作用素の累乗は

$$
\vartheta_1^n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^n \vartheta_m
$$

と書ける。これを微分作用素で書き直せば，

$$
\left(x \frac{d}{dx} \right)^n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^n x^m \frac{d^m}{dx^m}
$$

である。

定義 H.8 (第二種 Stirling 数)**.** 第二種 Stirling 数 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ を以下で定義する：

$$
\left\{ {n \atop m} \right\} := \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^n
$$

但し，$\left\{ {0 \atop 0} \right\} := 1$ とし，n が正整数の場合は $\left\{ {n \atop 0} \right\} := 0$ とする。

系 H.9. Euler 作用素の累乗は第二種 Stirling 数 $\left\{ {m \atop k} \right\}$ を用いて以下のように表せる：

$$
\vartheta_1^n = \sum_{m=1}^{n} \left\{ {n \atop m} \right\} \vartheta_m .
$$

これを微分作用素で書き直せば，

$$
\left(x \frac{d}{dx} \right)^n = \sum_{m=1}^{n} \left\{ {n \atop m} \right\} x^m \frac{d^m}{dx^m} .
$$

補足 H.10. 第二種 Stirling 数 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ は，元の個数が n 個であるような集合を，空でない部分集合 m 個に分割する場合の数に等しい。

例 H.11. 第二種 Stirling 数 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ の具体的な値は表 H.1 に示した。

表 H.1　第二種 Stirling 数 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ の具体値 $(0 \leq m \leq n \leq 15)$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1															
1	0	1														
2	0	1	1													
3	0	1	3	1												
4	0	1	7	6	1											
5	0	1	15	25	10	1										
6	0	1	31	90	65	15	1									
7	0	1	63	301	350	140	21	1								
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1							
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1						
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1					
11	0	1	1023	28501	145750	246730	179487	63987	11880	1155	55	1				
12	0	1	2047	86526	611501	1379400	1323652	627396	159027	22275	1705	66	1			
13	0	1	4095	261625	2532530	7508501	9321312	5715424	1899612	359502	39325	2430	78	1		
14	0	1	8191	788970	10391745	40075035	63436373	49329280	20912320	5135130	752751	66066	3367	91	1	
15	0	1	16383	2375101	42355950	210766920	420693273	408741333	216627840	67128489	12662650	1479477	106470	4550	105	1

参考文献

[1] 朝倉 復刊セレクション 新数学講座『常微分方程式』高野 恭一，朝倉書店 (1994 年)

[2] すうがくの風景 7『超幾何関数』原岡 喜重，朝倉書店 (2002 年)

[3] 復刊 近代数学講座 5『特殊函数』小松 勇作，朝倉書店 (2004 年)

[4] 基礎数学 2『解析入門 I』杉浦 光夫，東京大学出版会 (1980 年)

[5]『球面調和函数と群の表現』野村 隆昭，日本評論社 (2018 年)

[6] 共立講座 数学の輝き『素数とゼータ関数』小山 信也，共立出版 (2015 年)

[7] スミルノフ高等数学教程 7-Ⅲ巻二部 第二分冊

[8]『超幾何級数 I』無限級数の値 (`https://infseries.com`)

[9]『鎮守府数学科』(`https://syosetu.org/novel/127002/`)